

# Zusammenfassung Lineare Algebra I

Prof. Menny Akka Ginosar, HS 2020

Manuel Antoinette

1. März 2021

Diese Zusammenfassung listet hauptsächlich alle Definitionen, Lemmas, Korollare, Theoreme, Sätze, Propositionen und ein paar wichtige Beispiele und Übungen auf, wie sie im Skript aufgeschrieben sind (zum Teil etwas paraphrasiert). Sie soll dazu dienen einen Überblick über alle Definitionen und deren Folgerungen zu geben. Die Gliederung und Nummerierung der Theoreme ist dabei aus dem Skript übernommen.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>3</b>
1.1 Mengen und Abbildungen . . . . .	3
1.2 Gruppen . . . . .	8
1.2.1 Wichtiges Beispiel: Restklassen modulo $n$ . . . . .	8
1.2.2 Untergruppen, Homomorphismen und Isomorphismen . . . . .	9
1.3 Ringe und Körper . . . . .	9
1.3.1 Ringe . . . . .	9
1.3.2 Körper . . . . .	10
1.4 Polynome . . . . .	11
1.4.1 Unterschied zwischen Polynomen und Polynomfunktionen . . . . .	11
1.4.2 Division mit Rest in $K[x]$ . . . . .	12
1.4.3 Nullstellen . . . . .	12
1.4.4 Polynome über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ . . . . .	12
<b>2 Vektorräume</b>	<b>13</b>
2.1 Ein Haufen Beispiele und ein bisschen Theorie . . . . .	14
2.2 Zurück zur Theorie . . . . .	16
2.2.1 Span und Linearkombinationen . . . . .	16
2.2.2 Beispiele . . . . .	16
2.2.3 Lineare Unabhängigkeit und die Definition einer Basis . . . . .	17
2.3 Endlich-dimensionale Vektorräume . . . . .	17
2.3.1 Gleichgewicht . . . . .	18
2.3.2 Basen von Vektorräumen ohne Gaussische Elimination . . . . .	18
2.3.3 Zeilen- und Spaltenraum und die Gaussische Elimination . . . . .	18
2.3.4 Summen . . . . .	19
<b>3 Lineare Abbildungen</b>	<b>20</b>
3.1 Definition einer linearen Abbildung . . . . .	20
3.2 Kern und Bild . . . . .	21
3.3 Koordinaten für Vektorräume und lineare Abbildungen . . . . .	22
3.3.1 Matrizen und lineare Abbildungen . . . . .	22
3.3.2 Matrizen . . . . .	23
3.3.3 Zurück zu Darstellungen linearer Abbildungen . . . . .	24

3.4	Spaltenrang ist gleich Zeilenrang . . . . .	25
3.5	$\text{Hom}(V, W)$ als Vektorraum . . . . .	25
3.6	Die Inverse, Elementarmatrizen und lineare Gleichungssysteme . . . . .	25
3.6.1	Elementarmatrizen und Zeilen- und Spaltenoperationen . . . . .	26
3.7	Fasern und Quotientenräume . . . . .	27
3.7.1	Fasern . . . . .	27
3.7.2	Quotientenraum . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Determinanten</b> . . . . .	<b>29</b>
4.1	Magie in $K^2$ mit $2 \times 2$ -Matrizen . . . . .	29
4.2	Volumen-Funktionen und die abstrakte Definition der Determinante . . . . .	29
4.3	Existenz der Determinante . . . . .	30
4.3.1	Permutationen . . . . .	30
4.3.2	Signum einer Permutation . . . . .	31
4.3.3	Existenz . . . . .	31
4.3.4	(Determinante über einem Ring) . . . . .	31
4.4	Magie mit Minoren . . . . .	32
4.5	Verschiedene Wege in der Welt der Determinante . . . . .	32
4.6	Determinante und Rang . . . . .	32
4.7	Einige Korollare und die Determinante eines Endomorphismus . . . . .	32
4.8	Volumen und Orientierung . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Eigenvektoren und Eigenwerte</b> . . . . .	<b>33</b>
5.1	Einführung . . . . .	33
5.2	Definitionen . . . . .	33
5.2.1	Definition 5.2.8 explizit für Matrizen . . . . .	34
5.2.2	Eigenvektoren mit verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig . . . . .	34
5.3	Das charakteristische Polynom . . . . .	34
5.3.1	Direkte Summen II . . . . .	35
5.3.2	Diagonalisierbarkeit I . . . . .	35
5.3.3	Geometrische Vielfachheit ist kleiner als algebraische Vielfachheit . . . . .	35
5.3.4	Diagonalisierbarkeit II . . . . .	35

# 1 Grundlagen

## 1.1 Mengen und Abbildungen

Dieses Kapitel wird im Skript *Analysis I und II, 2018/19, Manfred Einsiedler und Andreas Wieser* [A] im Kapitel 1.4 behandelt.

### [A] 1.4.1 Naive Mengenlehre

**Definition 1.12** (Inklusionen). Wir sagen, dass eine Menge  $P$  *Teilmenge* einer Menge  $Q$  ist und schreiben  $P \subseteq Q$ , falls für alle  $x \in P$  auch  $x \in Q$  gilt:

$$\forall x \in P : x \in Q$$

*Bemerkung.* Weiter werden hier **echte Teilmengen** und (**echte-**) **Obermengen** definiert.

**Definition 1.14** (Mengenoperationen). Seien  $P, Q$  zwei Mengen. **Durchschnitt**, **Vereinigung**, **relatives Komplement** und **symmetrische Differenz** sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} P \cap Q &= \{x \mid x \in P \wedge x \in Q\} \\ P \cup Q &= \{x \mid x \in P \vee x \in Q\} \\ P \setminus Q &= \{x \mid x \in P \wedge x \notin Q\} \\ P \Delta Q &= P \setminus Q \cup Q \setminus P = \{x \mid x \in P \text{ XOR } x \in Q\} \end{aligned}$$

*Bemerkung.*  $\wedge, \vee, \cup$  und  $\cap$  sind Distributiv, Kommutativ und Assoziativ. Weiter gelten die Gesetze von De Morgan:  $(P \cup Q)^C = P^C \cap Q^C$  und  $(P \cap Q)^C = P^C \cup Q^C$

**Definition 1.17** (Beliebige Vereinigungen und Schnitte). Sei  $\mathcal{A}$  eine Kollektion von Mengen. Dann definieren wir die **Vereinigung** resp. den **Schnitt** der Mengen in  $\mathcal{A}$  als

$$\begin{aligned} \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A &= \{x \mid \exists A \in \mathcal{A} : x \in A\} \\ \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A &= \{x \mid \forall A \in \mathcal{A} : x \in A\} \end{aligned}$$

**Definition 1.20** (Disjunktheit). Zwei Mengen  $A, B$  heissen **disjunkt**, falls  $A \cap B = \{\}$ . In diesem Fall wird ihre Vereinigung  $A \cup B$  **disjunkte Vereinigung** genannt und auch als  $A \sqcup B$  geschrieben.

*Bemerkung.* Weiter wird die **paarweise Disjunktheit** von Mengen einer Kollektion, welche dann **disjunkte Vereinigung** genannt wird, definiert.

**Definition 1.21** (Kartesisches Produkt). Für zwei Mengen  $X$  und  $Y$  ist das **kartesische Produkt**  $X \times Y$  die Menge aller geordneten Paare  $(x, y)$  wobei  $x \in X$  und  $y \in Y$ . Allgemein:

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\}$$

**Definition 1.25** (Potenzmenge). Für eine Menge  $X$  ist die **Potenzmenge**  $\mathcal{P}(X)$  durch die Menge all ihrer Teilmengen gegeben, das heisst

$$\mathcal{P}(X) = \{Q \mid Q \text{ ist eine Menge und } Q \subseteq X\}$$

### [A] 1.4.2 Abbildungen

**Definition 1.29** (Funktionen und erste dazugehörige Begriffe). In Worten ausgedrückt ist eine **Funktion**  $f$  von der Menge  $X$  nach der Menge  $Y$  eine Zuordnung, die jedem  $x \in X$  ein eindeutig bestimmtes  $y = f(x) \in Y$  zuweist. Wir sprechen manchmal auch von einer **Abbildung** oder einer **Transformation**. Zu einer Funktion  $f : X \rightarrow Y$  wird  $X$  der **Definitionsbereich** von  $f$  und  $Y$  der

**Wertebereich** (oder **Zielbereich**) genannt. (...**Argument**, **Wert**...). Das **Bild einer Funktion**  $f : X \rightarrow Y$  ist die Menge

$$f(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : y = f(x)\}$$

Falls  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion und  $A$  eine Teilmenge von  $X$  ist, dann definieren wir die **Einschränkung**  $f|_A : A \rightarrow Y$  durch  $f|_A(x) = f(x)$  für alle  $x \in A$ . Umgekehrt wird die Abbildung  $f$  auch als eine **Fortsetzung** der Funktion  $f|_A$  bezeichnet. Des Weiteren definieren wir das **Bild der Teilmenge**  $A$  unter  $f$  als

$$f(A) = f|_A(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A : y = f(x)\}$$

**Beispiel 1.30** (Erste Funktionen). (c) Sei  $A \subseteq X$  eine Teilmenge. Die Funktion

$$\mathbb{1}_A : X \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin A \\ 1 & \text{für } x \in A \end{cases}$$

wird die **charakteristische Funktion** von  $A$  genannt.

(d) Für zwei Mengen  $X_1, X_2$  definieren wir die **Projektionen**

$$\pi_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$$

$$\pi_1((x_1, x_2)) = x_1$$

und analog für  $\pi_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_2$ .

**Definition 1.31** (Drei Eigenschaften von Funktionen). Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion.

- Die Funktion  $f$  heisst **injektiv** oder eine **Injektion** falls für alle  $x_1, x_2 \in X$  gilt, dass  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .
- Die Funktion  $f$  ist **surjektiv**, eine **Surjektion** oder eine Funktion von  $X$  **auf**  $Y$ , falls  $f(X) = Y$ .
- Die Funktion  $f$  heisst **bijektiv**, eine **Bijektion** oder eine **eindeutige Abbildung**, falls  $f$  surjektiv und injektiv ist.

**Definition 1.34** (Umkehrabbildung). Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Bijektion. Die **Umkehrabbildung** (**Inverse Abbildung** oder auch kurz  $f$  **invers**)  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  von  $f$  ist die Abbildung, welche jedem  $y \in Y$  das eindeutig bestimmte Element  $x \in X$  mit  $y = f(x)$  zuweist.

**Definition 1.35** (Verknüpfung). Angenommen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  sind Funktionen. Dann ist die **Verknüpfung**  $g \circ f(x) = g(f(x))$  definiert.

*Bemerkung.* Die Verknüpfung ist assoziativ aber nicht kommutativ.

**Lemma 1.42** (Eigenschaften von Verknüpfungen). *Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Funktionen.*

(i) *Falls  $f$  und  $g$  injektiv sind, dann ist auch  $g \circ f$  injektiv.*

(ii) *Falls  $f$  und  $g$  surjektiv sind, dann ist auch  $g \circ f$  surjektiv.*

(iii) *Falls  $f$  und  $g$  bijektiv sind, dann ist auch  $g \circ f$  bijektiv und es gilt  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .*

*Beweis-Idee.* (i): Angenommen  $f$  und  $g$  sind injektiv und  $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$  für  $x_1, x_2 \in X$ . Aus der Definition von Injektivität folgt  $x_1 = x_2$ .

(ii): Angenommen  $f$  und  $g$  sind surjektiv. Mit der Definition von Surjektivität kann man zeigen, dass für jedes Element  $z \in Z$  ein  $x \in X$  existiert mit  $g \circ f(x) = z$ .

(iii): Bijektivität folgt direkt aus (i) und (ii). Für den zweiten Teil muss man zeigen, dass  $f^{-1}(g^{-1}(z))$  der Punkt ist, der unter  $g \circ f$  auf  $z$  abgebildet wird.  $\square$

**Übung 1.43** (Weitere Eigenschaften von Verknüpfungen). Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Funktionen. Folgende Eigenschaften sind zu zeigen:

- (i)  $g$  ist surjektiv, falls  $g \circ f$  surjektiv ist ( $f$  nicht unbedingt!).
- (ii)  $f$  ist surjektiv, falls  $g \circ f$  surjektiv und  $g$  injektiv ist.
- (iii)  $f$  ist injektiv, falls  $g \circ f$  injektiv ist ( $g$  nicht unbedingt!).
- (iv)  $g$  ist injektiv, falls  $g \circ f$  injektiv und  $f$  surjektiv ist.

**Definition 1.45** (Urbilder einer Funktion). Für eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  und eine Teilmenge  $B \subseteq Y$  definieren wir das **Urbild**  $f^{-1}(B)$  von  $B$  unter  $f$  als

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

**Übung 1.46** (Verhalten von Bildern und Urbildern unter Mengenoperationen). Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion und  $A, A' \subseteq X$  und  $B, B' \subseteq Y$  Teilmengen. Folgende Eigenschaften sind zu zeigen:

- (i)  $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$
- (ii)  $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$
- (iii)  $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ ,  $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$
- (iv)  $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$ , mit Gleichheit falls  $f$  injektiv, dann gilt auch  $f(A \setminus A') = f(A) \setminus f(A')$ .
- (v)  $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$  und  $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$
- (vi)

*Bemerkung.* In (iv) und (v) sieht man, dass die Urbildoperation mit allen <sup>1</sup> Mengenoperationen verträglich ist, während dies die Bildoperation nur für die Vereinigung oder unter gewissen Bedingungen erfüllt.

**Definition 1.47** (Graph einer Funktion). Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion. Der **Graph** von  $f$  ist:

$$\text{graph}(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \subseteq X \times Y$$

*Bemerkung.* Eine Teilmenge  $\Gamma \subseteq X \times Y$  ist genau dann ein Graph einer Funktion  $f : X \rightarrow Y$ , wenn  $\pi_1|_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow X$  bijektiv ist.  $f$  ist durch diesen Graphen eindeutig bestimmt durch  $\pi_2 \circ (\pi_1|_{\text{graph}(f)})^{-1} = f$ . Weiter lässt sich im Graphen erkennen ob  $f$  injektiv bzw. surjektiv ist, nämlich genau dann, wenn  $\pi_2|_{\text{graph}(f)}$  injektiv bzw. surjektiv ist.

Gewisse Objekte bezeichnet man als **kanonisch** oder **natürlich**, wenn sie unabhängig von jeglicher Wahl sind. Hier ein Beispiel:

**Beispiel 1.52** (Kanonische Abbildungen). Sei  $A \subseteq X$  eine Teilmenge. Wir betrachten injektive Abbildung  $A \rightarrow X$  und suchen darunter eine kanonische, die man am schnellsten hinschreiben kann. Die **Inklusionsabbildung**  $\iota : A \rightarrow X, x \mapsto x$  ist am natürlichsten.

Die **Menge aller Abbildungen** von  $X$  nach  $Y$  wird als  $Y^X = \{f \mid f : X \rightarrow Y \text{ ist eine Funktion}\}$  geschrieben. Falls  $X$  und  $Y$  endliche Mengen mit  $m$  resp.  $n \in \mathbb{N}$  Elementen sind, hat  $Y^X$  genau  $n^m$  Elemente.

---

<sup>1</sup>Vereinigung, Durchschnitt und Komplement

### [A] 1.4.3 Relationen

**Definition 1.53** (Relationen). Seien  $X$  und  $Y$  Mengen. Eine **Relation** auf  $X \times Y$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ . Wir schreiben auch  $x\mathcal{R}y$  falls  $(x, y) \in \mathcal{R}$  und verwenden of Symbole wie  $<, \ll, \leq, \cong, \equiv, \sim$  für Relationen. Falls  $X = Y$  ist, dann sprechen wir auch von einer Relation auf  $X$ . Wenn  $\sim$  eine Relation ist, dann schreiben wir auch „ $x \not\sim y$ “ für „ $\neg(x \sim y)$ “.

**Definition 1.55** (Äquivalenzrelationen). Eine Relation  $\sim$  auf  $X$  ist eine **Äquivalenzrelation**, falls folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

- Reflexivität:  $\forall x \in X : x \sim x$ .
- Symmetrie:  $\forall x, y \in X : x \sim y \Rightarrow y \sim x$ .
- Transitivität:  $\forall x, y, z \in X : ((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \Rightarrow x \sim z$ .

**Beispiel 1.56** (Beispiele von Äquivalenzrelationen). (i)  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in X^2 \mid x = y\}$ .

**Definition 1.60** (Äquivalenzklassen und die Quotientenmenge). Sei  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf einer Menge  $X$ . Dann wird für  $x \in X$  die Menge

$$[x]_{\sim} = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

die **Äquivalenzklasse** von  $x$  genannt. Weiters ist

$$X/\sim = \{[x]_{\sim} \mid x \in X\}$$

der **Quotient** (oder die **Quotientenmenge**) von  $X$  modulo  $\sim$ . Ein Element  $x \in X$  wird auch **Repräsentant** seiner Äquivalenzklasse  $[x]_{\sim}$  genannt.

**Definition 1.61** (Partition). Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{P}$  eine Familie von nicht-leeren, paarweise disjunkten Teilmengen von  $X$ , so dass  $X = \bigsqcup_{P \in \mathcal{P}} P$ . Dann wird  $\mathcal{P}$  eine **Partition von  $X$  genannt**.

**Proposition 1.62** (Korrespondenz zwischen Äquivalenzrelationen und Partitionen). Sei  $X$  eine Menge. Für eine gegebene Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $X$  ist die Menge

$$\mathcal{P}_{\sim} = \{[x]_{\sim} \mid x \in X\}$$

eine Partition von  $X$ . Umgekehrt definiert für eine Partition von  $\mathcal{P}$  von  $X$

$$x \sim_{\mathcal{P}} y \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{P} : x \in P \wedge y \in P$$

für  $x, y \in X$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ . Des weiteren ist die Konstruktion der Partition aus der Äquivalenzrelation und umgekehrt invers: Für jede Partition  $\mathcal{P}$  von  $X$  gilt  $\mathcal{P}_{\sim_{\mathcal{P}}} = \mathcal{P}$  und für jede Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $X$  gilt  $\sim_{\mathcal{P}_{\sim}} = \sim$ .

*Bemerkung.* Es gilt  $\mathcal{P}_{\sim} = X/\sim$ , jedoch wollen wir beide Symbole mitführen und unterschiedlich interpretieren.

*Beweis-Idee zu prop. 1.62.* Verwende  $x \sim y \Leftrightarrow [x]_{\sim} = [y]_{\sim} \Leftrightarrow [x]_{\sim} \cap [y]_{\sim} \neq \{\}$  und zeige dass die Menge der Äquivalenzklassen eine Partition bildet und umgekehrt, dass eine Partition Reflexivität, Symmetrie und Transitivität erfüllt und somit eine Äquivalenzrelation bildet.  $\square$

Seien  $X, Y$  Mengen,  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion und  $\sim$  eine Äquivalenzrelation. Häufig will man eine Funktion auf  $X/\sim$  unter Verwendung der Repräsentanten der Äquivalenzklassen definieren. Möglicherweise wollen wir durch

$$\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y, [x]_{\sim} \mapsto f(x)$$

eine Funktion definieren. Dies ist aber nur dann möglich, wenn  $x_1 \sim x_2$  für  $x_1, x_2 \in X$  (also  $[x_1]_{\sim} = [x_2]_{\sim}$ ) auch  $f(x_1) = f(x_2)$  impliziert. In diesem Fall ist  $\bar{f}([x]_{\sim})$  unabhängig von der Wahl des Repräsentanten  $x$  der Äquivalenzklasse  $[x]_{\sim}$ . Wir sagen dass Funktionen mit dieser (für Funktionen notwendige) Eigenschaft **wohldefiniert** sind.

**Lemma 1.67** (Funktionen durch Fallunterscheidungen). Seien  $X$  und  $Y$  Mengen und sei  $\mathcal{P}$  eine Partition von  $X$ . Angenommen es ist für jedes  $P \in \mathcal{P}$  eine Funktion  $f_P : P \rightarrow Y$  gegeben. Dann existiert eine eindeutige Funktion  $f : X \rightarrow Y$ , so dass  $f|_P = f_P$  für jedes  $P \in \mathcal{P}$  gilt.

*Beweis-Idee.* Für jedes  $x \in X$  existiert genau ein  $P \in \mathcal{P}$ . Definiere  $f$  nun sodass  $f(x) = f_P(x)$ . Nach Konstruktion gilt  $f|_P = f_P$ . Die Eindeutigkeit bleibt noch zu zeigen.  $\square$

#### [A] 1.4.4 Mächtigkeit

**Definition 1.69** (Gleichmächtigkeit). Zwei Mengen  $X, Y$  sind **gleichmächtig**, geschrieben  $X \sim Y$ , falls es eine Bijektion  $f : X \rightarrow Y$  gibt.

*Bemerkung.* Die Gleichmächtigkeit definiert eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller Mengen. Für endliche Mengen  $A$  und  $B$  mit  $m$  bzw.  $n$  verschiedenen Elementen ist  $A \sim B$  genau dann, wenn  $m = n$  gilt.

**Definition 1.70** (Endliche Mengen). Wir sagen, dass die Kardinalität der leeren Menge  $\emptyset$  Null ist und schreiben  $|\emptyset| = \#\emptyset = 0$ . Sei nun  $X$  eine beliebige Menge und  $n \geq 1$  eine natürliche Zahl. Die Menge  $X$  hat **Kardinalität  $n$** , falls  $X$  gleichmächtig zu  $\{1, \dots, n\}$  ist. In diesem Fall schreiben wir  $|X| = \#X = n$ . Des Weiteren ist  $X$  eine **endliche Menge** und hat **endliche Kardinalität**, falls  $|X| = n$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  und wir schreiben auch  $|X| < \infty$ . Ist  $X$  eine nicht-endliche Menge, so nennen wir  $X$  eine **unendliche Menge**, bzw.  $X$  hat **unendliche Kardinalität** und schreiben  $|X| = \infty$ .

**Proposition 1.71** (Schubfachprinzip). Seien  $m > n \geq 1$  natürliche Zahlen. Dann gibt es keine injektive Abbildung von  $\{1, \dots, m\}$  nach  $\{1, \dots, n\}$ . Insbesondere sind zwei endliche Mengen  $X$  und  $Y$  genau dann gleichmächtig, wenn  $|X| = |Y|$  ist.

*Beweis-Idee.* Beweis durch Induktion.  $\square$

**Übung 1.72** (Schubfachprinzip mittels surjektiven Funktionen). Seien  $m > n \geq 1$  natürliche Zahlen. (Zu zeigen:) Es gibt keine surjektive Abbildung von  $\{1, \dots, n\}$  nach  $\{1, \dots, m\}$ .

**Übung 1.73.** Sei  $X$  eine endliche Menge und  $f : X \rightarrow X$  eine Abbildung. (Zu zeigen:) (i) Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von  $f$  sind äquivalent.

**Theorem 1.74** (Cantors Diagonalargument). Sei  $X$  eine Menge. Dann ist  $X$  nicht zu seiner Potenzmenge  $\mathcal{P}(X)$  gleichmächtig. Insbesondere ist die Menge  $\mathbb{N}$  nicht gleichmächtig zu  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

*Beweis (Widerspruchsbeweis).* Nehme bijektive Funktion  $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  an und definiere die Menge  $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$ . Nach Definition von  $A$  kann es aber kein  $a \in X$  geben sodass  $f(a) = A$ . Somit widerspricht dies der Surjektivität von  $f$ .  $\square$

**Definition 1.79** (Schmächtiger). Seien  $X$  und  $Y$  zwei Mengen. Dann sagen wir, dass  $X$  **schmächtiger** als (oder genau formuliert **höchstens so mächtig** wie)  $Y$  ist und schreiben  $X \lesssim Y$ , falls es eine Injektion  $f : X \rightarrow Y$  gibt. (... **echt schmächtiger** oder **weniger mächtig**).

**Theorem 1.81** (Cantor, Schröder, Bernstein). Seien  $X$  und  $Y$  Mengen, so dass  $X \lesssim Y$  und  $Y \lesssim X$ . Dann gilt  $X \sim Y$ .

Oder aus *Grundlagen, Kapitel 1, Ein Beweis zu Cantor-Schröder-Bernstein*:

**Theorem** (Cantor-Schröder-Bernstein). Seien  $A, B$  zwei Mengen mit  $|A| \leq |B|$  und  $|B| \leq |A|$ . Dann folgt, dass  $|A| = |B|$ .

*Beweis.* Aufgrund der Annahme existieren zwei bijektive Funktionen  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow A$ . Verwende diese um eine Bijektion zwischen  $A$  und  $B$  aufzustellen.  $\square$

**Definition 1.84** (Kardinalität einer Menge). Die zu einer Menge  $X$  gehörenden Äquivalenzklasse bezüglich Gleichmächtigkeit wird die **Kardinalität** der Menge  $X$  genannt und als  $|X|$  geschrieben. Falls  $X$  endlich ist und genau  $n$  verschiedene Elemente hat, dann schreiben wir  $|X| = n$ . Eine Menge heisst **abzählbar unendlich**, falls sie die Kardinalität  $|\mathbb{N}|$  hat oder in anderen Worten gleichmächtig zu  $\mathbb{N}$  ist. Die Kardinalität von  $\mathbb{N}$  wird auch  $\aleph_0$ , gesprochen **Aleph-0**, genannt.

**Definition 1.86** (Das Kontinuum). Eine Menge  $X$  heisst **überabzählbar**, falls  $\mathbb{N}$  schwächer ist als  $X$ , aber  $\mathbb{N}$  nicht gleichmächtig zu  $X$  ist. Nach Theorem 1.74 ist  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  überabzählbar. Die Kardinalität von  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  wird auch mit  $\mathfrak{c}$  bezeichnet und das **Kontinuum** genannt.

## 1.2 Gruppen

**Definition 1.1** (Gruppe). Eine *Gruppe*  $(G, e, \cdot)$  ist eine Menge  $G$  versehen mit einem Element  $e \in G$  (das neutrale Element) und einer Verknüpfung  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  mit folgenden Eigenschaften:

1. (Assoziativität von  $\cdot$ ) Für alle  $a, b, c \in G$  gilt  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .
2. (Neutrales Element) Für alle  $g \in G$  gilt  $e \cdot g = g \cdot e = g$ .
3. (Inverses Element) Zu jedem  $g \in G$  gibt es ein  $g' \in G$  mit  $g \cdot g' = g' \cdot g = e$ .

**Proposition 1.2** (Eigenschaften einer Gruppe). 1) *Das neutrale Element ist eindeutig bestimmt*

2) *Das inverse Element von  $G$  ist eindeutig bestimmt. (Dadurch können wir  $a^{-1}$  für das inverse Element von  $a$  schreiben.)*

3) *Für alle  $a, b \in G$  gilt  $(a^{-1})^{-1} = a$  und  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .*

4) *Für alle  $a, b, c \in G$  gilt  $ab = ac$  genau dann wenn  $b = c$  und  $ba = ca$  genau, dann wenn  $b = c$ .*

**Definition 1.3** (Abelsche Gruppe). Eine Gruppe  $(G, e, \cdot)$  heisst *abelsch* oder *kommutativ*, falls  $a \cdot b = b \cdot a$  für alle  $a, b \in G$  gilt.

### 1.2.1 Wichtiges Beispiel: Restklassen modulo $n$

Um Restklassen zu definieren betrachten wir die folgende Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{Z}$ : Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Wir definieren für  $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a \sim_n b \iff (b - a) \text{ ist durch } n \text{ teilbar} \iff \exists l \in \mathbb{Z} : (b - a) = ln.$$

Für  $\sim_n$  gibt es  $n$  verschiedene Äquivalenzklassen, die man durch „Restklassen“ darstellen kann:

$$[a]_{\sim_n} = a + n\mathbb{Z} := \{a + nl \mid l \in \mathbb{Z}\} = \{\text{alle ganzen Zahlen mit Rest } a \text{ bei Division mit } n\}$$

Wir schreiben  $\bar{a}$  für  $[a]_{\sim_n}$ , wenn  $n$  aus dem Zusammenhang klar ist. Des Weiteren schreiben wir  $a \equiv b \pmod{n}$  oder  $a \equiv b \pmod{n}$  oder  $a \equiv b(n)$ , falls  $a \sim_n b$ .

**Definition 1.11** (Restklassen). Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Wir schreiben  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  für die Menge der Äquivalenzklassen von  $\sim_n$ , das heisst

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\sim_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{(n-1)}\}$$

**Definition 1.12** (Addition auf  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ). Seien  $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Wir definieren

$$\bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b}$$

**Lemma 1.13.** *Die Addition in Definition 1.12 ist wohl definiert.*

*Beweis-Idee.* Seien  $a, a' \in \mathbb{Z}$  mit  $\bar{a} = \bar{a}'$  zwei möglicherweise verschiedene Repräsentanten einer Restklasse und  $b, b' \in \mathbb{Z}$  mit  $\bar{b} = \bar{b}'$ . Es ist zu zeigen, dass  $\overline{a + b} = \overline{a' + b'}$ .  $\square$

**Theorem 1.14.** *Die Menge  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  zusammen mit der obigen Addition ist eine abelsche Gruppe.*

*Beweis-Idee.* Es müssen vier Eigenschaften überprüft werden: Assoziativität folgt aus Assoziativität in  $\mathbb{Z}$ ,  $\bar{0}$  ist das neutrale Element,  $-\bar{a}$  ist die Inverse von  $\bar{a}$ , Die Gruppe ist abelsch, da  $\mathbb{Z}$  abelsch ist.  $\square$

## 1.2.2 Untergruppen, Homomorphismen und Isomorphismen

**Definition 1.16** (Untergruppe). Sei  $(G, \cdot)$  eine Gruppe. eine Teilmenge  $H \subseteq G$  hiesst eine *Untergruppe* (von  $G$ ), falls das Folgende gilt:

- $H$  ist nicht leer.
- Für alle  $h_1, h_2 \in H$  gilt  $h_1 h_2 \in H$ .
- Für alle  $h \in H$  gilt  $h^{-1} \in H$ .

**Definition 1.19** (Homomorphismus und Isomorphismus). Seien  $(G, \cdot)$  und  $(H, *)$  zwei Gruppen. Eine Abbildung  $\varphi : G \rightarrow H$  ist ein *Homomorphismus*, falls für alle  $g_1, g_2 \in G$  gilt  $\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) * \varphi(g_2)$ . Ein bijektiver Homomorphismus nennen wir einen *Isomorphismus*.

**Lemma 1.20.** Sei  $\varphi : (G, e_G, \cdot) \rightarrow (H, e_H, *)$  ein Homomorphismus. Dann gilt:

- (a)  $\varphi(e_G) = e_H$ , wobei  $e_G$  und  $e_H$  jeweils die neutralen Elemente von  $G$  und  $H$  sind.
- (b)  $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$  für alle  $a \in G$ .

## 1.3 Ringe und Körper

### 1.3.1 Ringe

**Definition 1.24** (Ring). Eine Menge  $R$  zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + : R \times R &\rightarrow R, (a, b) \mapsto a + b \text{ (Addition)} \\ \cdot : R \times R &\rightarrow R, (a, b) \mapsto a \cdot b \text{ (Multiplikation)} \end{aligned}$$

heisst *Ring*, falls:

(R1)  $(R, +)$  ist eine abelsche Gruppe.

(R2)  $\cdot$  ist assoziativ.

(R3) Für alle  $a, b, c \in R$  gilt  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  und  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ .

Des Weiteren definieren wir:

- $R$  heisst *kommutativ*, falls für alle  $a, b \in R$  gilt  $a \cdot b = b \cdot a$ .
- $R$  heisst *Ring mit Eins*, falls es ein Element  $1 \in R$  gibt, so dass  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$  für alle  $a \in R$  gilt. Das Element  $1 \in R$  mit dieser Eigenschaft heisst Einselement.

**Beispiel 1.26** (Restklassen). Wir betrachten  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Wir definieren für  $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ :

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

Mit dieser Definition ist  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ein (endlicher) kommutativer Ring dem Einselement  $\bar{1}$ .

**Lemma 1.27.** Für alle  $a \in R$  haben wir  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ .

Wenn wir einen Ring  $R$  mit Eins haben, könnten wir uns fragen, ob es auf  $R$  eine Gruppenstruktur bezüglich Multiplikation gibt. In diesem Fall wäre  $1 \in R$  das neutrale Element. Jedoch bildet das Element  $0 \in R$  ein Problem (Lemma 1.27). Wir könnten uns nun fragen ob es auf  $R \setminus \{0\}$  eine solche Gruppenstruktur gibt. Jedoch sehen wir, dass zum Beispiel in  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{0}$  ist, und  $R \setminus \{0\}$  somit keine multiplikative Gruppe sein kann, da die Menge nicht einmal abgeschlossen ist bezüglich der Multiplikation.

**Definition 1.28.** Ein Ring heisst *nullteilerfrei*, wenn für alle  $a, b \in R$  mit  $ab = 0$  folgt, dass  $a = 0$  oder  $b = 0$ .

### 1.3.2 Körper

**Definition 1.30** (Körper). Eine Menge  $K$  (oder  $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ) zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + : K \times K &\rightarrow K, (a, b) \mapsto a + b \text{ (Addition)} \\ \cdot : K \times K &\rightarrow K, (a, b) \mapsto a \cdot b \text{ (Multiplikation)} \end{aligned}$$

heißt *Körper*, wenn Folgendes gilt:

- (1)  $K$  zusammen mit der Addition ist eine abelsche Gruppe (0 ist ihr neutrales Element,  $-a$  die Inverse von  $a \in K$ ).
- (2) Sei  $K^\times := K \setminus \{0\}$ . Dann ist  $(K^\times, \cdot, 1)$  eine abelsche Gruppe. Das heißt, für alle  $a, b \in K^\times$  ist  $ab \in K^\times$  und für alle  $a \in K^\times$  existiert ein  $b \in K^\times$  mit  $ab = 1$ . In diesem Fall schreiben wir  $b = a^{-1} =: \frac{1}{a}$  und allgemeiner schreiben wir  $\frac{c}{d} := cd^{-1}$ .
- (3) Es gelten die Distributivgesetze:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  und  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ .

Kurz gesagt ist ein Körper ein Ring mit Eins, wo jedes von Null verschiedene Element eine multiplikative Inverse hat.

**Definition 1.32** (alternative direkte Definition). Ein Körper ist ein Tupel  $(K, +, \cdot, 0, 1)$  bestehend aus einer Menge  $K$  mit zwei Abbildungen  $+$  und  $\cdot$  und ausgezeichneten Elementen  $0, 1 \in K$ , so dass die Körperaxiome gelten:

- *Assoziativität, Kommutativität, Neutrales Element, Inverses Element* der **Addition**
- *Assoziativität, Kommutativität, Neutrales Element, Inverses Element* der **Multiplikation**
- *Distributivität*
- *Nichttrivialität* ( $1 \neq 0$ )

**Lemma 1.33** (Folgerungen aus der Definition eines Körpers). (a) *Es gilt  $1 \neq 0$ . Das heißt, jeder Körper hat mindestens zwei Elemente.*

(b) *Es gilt  $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ .*

(c) *Falls  $a \cdot b = 0$ , dann ist  $a = 0$  oder  $b = 0$ . Anders gesagt, ist jeder Körper nullteilerfrei.*

(d) *Wir haben  $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$  und  $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ .*

(e) *Falls  $x \cdot a = y \cdot a$  mit  $a \in K^\times$  und  $x, y \in K$ , dann folgt  $x = y$ .*

**Lemma 1.35.** *Der Ring  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ist genau dann nullteilerfrei, wenn  $n$  eine Primzahl ist.*

*Beweis-Idee.* „ $\Rightarrow$ “ (Kontraposition) Zeige „ $n$  ist nicht prim“  $\Rightarrow$  „ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ist nicht nullteilerfrei“. „ $\Leftarrow$ “ Nehme jetzt an, dass  $n$  eine Primzahl ist. Seien  $\bar{k}, \bar{l} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  mit  $\bar{k} \cdot \bar{l} = \bar{0}$ . Zeige dass  $\bar{k} = 0$  oder  $\bar{l} = 0$ .  $\square$

**Lemma 1.37.** *Sei  $R$  ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit 1, so dass  $1 \neq 0$ . Falls  $R$  endlich viele Elemente besitzt, dann ist  $R$  ein Körper.*

*Beweis-Idee.* Sei  $R$  ein Ring wie im Lemma vorausgesetzt. Zeige nun dass jedes  $a \in R \setminus \{0\}$  eine multiplikative Inverse hat.  $\square$

**Korollar 1.38.** *Sei  $p$  eine Primzahl. Dann ist  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ein Körper mit  $p$  Elementen. Das Nullelement ist  $\bar{0}$  und das Einselement ist  $\bar{1}$ .*

**Definition 1.41.** Sei  $(K, 0, 1)$  ein Körper. für  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir  $n \cdot 1 = 1 + \dots + 1 \in K$ . Die *Charakteristik* von  $K$  ist dann definiert als

$$\text{char}(K) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \cdot 1 \neq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ \min\{n \mid n \cdot 1 = 0\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beachte, dass  $\text{char}(K) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ !

## 1.4 Polynome

**Definition 1.43** (Polynom). Sei  $K$  ein Körper und  $x$  eine Unbestimmte (unbekannte Variable). Wir nennen einen formalen Ausdruck der Form

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

wobei  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_i \in K$  für alle  $1 \leq i \leq n$ , ein *Polynom* über  $K$ . Die Menge

$$K[x] = \{f(x) \text{ wie oben, mit } n \in \mathbb{N} \text{ und } a_i \in K \text{ für alle } 0 \leq i \leq n\}$$

heisst der *Polynomraum* über  $K$  (mit Unbestimmter  $x$ ).

**Definition 1.45.** Das Polynom mit  $a_k = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  heisst das *Nullpolynom* und wird einfach mit  $0 \in K[x]$  bezeichnet. Normalerweise schreiben wir  $f \in K[x]$  statt  $f(x) \in K[x]$ . Der Grad von  $f \in K[x]$  wie in Definition 1.43 definieren wir als

$$\deg(f) = \begin{cases} -\infty, & \text{falls } f = 0 \\ \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Manchmal verwendet man das Summenzeichen, um Polynome kürzer zu schreiben:

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n.$$

Der höchste Koeffizient, der ungleich Null ist, heisst der *Leitkoeffizient* (oder führende Koeffizient). Wenn der Leitkoeffizient 1 ist, dann heisst das Polynom *normiert*. Polynome der Form  $a_l x^l$  für ein  $l \in \mathbb{N}$  heissen *Monome*. Wir können zwei Polynome  $f, g \in K[x]$  addieren und multiplizieren, indem wir die üblichen Regeln der Kommutativität, Assoziativität und Distributivität sowie Potenzregeln benutzen.

**Übung 1.46.** Seien  $f, g \in K[x]$  nicht Null. Es ist zu zeigen, dass  $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ . Jedoch beachte, dass  $\deg(f+g) = \max(\deg(f), \deg(g))$  **nicht unbedingt** gilt!

*Bemerkung* (Präzise Definition der Addition und Multiplikation). Seien  $f, g \in K[x]$  mit entsprechenden Folgen  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  und  $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ .

- $f + g$  ist das eindeutige Polynom, das der Folge  $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$  mit  $c_k = a_k + b_k$  entspricht.
- $f \cdot g$  ist das eindeutige Polynom, das der Folge  $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$  entspricht, wobei

$$c_k := a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0 = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k \\ i+j=k}} a_i b_j.$$

**Definition 1.49.** Elemente von  $\mathbb{Q}[x]$  (resp.  $\mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$ ) heissen *rationale Polynome* (resp. *reelle Polynome, komplexe Polynome*).

**Definition 1.50** (Teilbarkeit). Seien  $f, g \in K[x]$ . Wir sagen,  $f$  teilt  $g$  und schreiben  $f \mid g$ , falls ein  $h \in K[x]$  existiert, so dass  $g = f \cdot h$ .

### 1.4.1 Unterschied zwischen Polynomen und Polynomfunktionen

Für die unbestimmte  $x$  in  $K[x]$  kann man verschiedene Dinge einsetzen, unter anderem Elemente von  $K$ . Wir definieren die „Auswertungs-Abbildung“ (engl. evaluation) durch

$$\begin{aligned} \text{ev}_K : K[x] &\rightarrow \text{Abb}(K, K) = \{\text{Funktionen von } K \text{ nach } K\}, \\ f &\mapsto \text{ev}_K(f), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \text{ev}_K(f) : K &\rightarrow K, \\ \lambda &\mapsto f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n \end{aligned}$$

für  $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ .

Wir möchten zwischen  $f \in K[x]$  und  $\text{ev}_K(f)$  unterscheiden, da  $\text{ev}_K$  im Allgemeinen nicht injektiv ist, zum Beispiel ist in  $\mathbb{F}_3[x]$ ,  $x^3 - x = 0$ ! In einem Körper mit unendlich vielen Elementen ist  $\text{ev}_K$  jedoch in der Tat injektiv.

### 1.4.2 Division mit Rest in $K[x]$

**Lemma 1.45** (Division mit Rest). *Sei  $f \in K[x]$  ein beliebiges Polynom und  $0 \neq g \in K[x]$ . Dann gibt es Polynome  $q, r \in K[x]$ , so dass  $f = qg + r$  mit  $\deg(r) < \deg(g)$  oder  $r = 0$ .*

*Beweis-Idee.* Zeige das Lemma zuerst für  $\deg(g) = 0$ . Dann für  $\deg(g) \geq 1$ , beweise die (eindeutige) Existenz von  $q$  und  $r$  mittels Induktion über  $\deg(f)$ .  $\square$

In der Praxis benutzt man oft die „schriftliche Division“ um Division mit Rest durchzuführen.

### 1.4.3 Nullstellen

Wir sagen, dass  $a \in K$  eine Nullstelle von  $0 \neq f \in K[x]$  ist, falls  $f(a) = 0$ .

**Korollar 1.57** (Linearfaktorzerlegung). *Sei  $a \in K$  und  $f \in K[x]$  ein von Null verschiedenes Polynom. Dann ist  $a$  eine Nullstelle von  $f$  genau dann, wenn  $(x - a)$  ein Teiler von  $f$  in  $K[x]$  ist.*

*Beweis-Idee.* Wende Division mit Rest mit  $g(x) = x - a$  an:  $f(x) = q(x)(x - a) + r(x)$  mit  $\deg(r) < \deg(g) = 1$ . Nun zeige  $f(a) = 0 \iff (x - a)$  ist ein Teiler von  $f$ .  $\square$

Das Polynom  $(x - a)$  kann mehrmals ein Polynom  $P \in K[x]$  teilen. Dann spricht man von *mehrfache Nullstelle*.

**Definition 1.58.** Sei  $p \in K[x]$  mit  $\deg(p) > 0$ . Für  $a \in K$  definieren wir die *Vielfachheit von  $a$  bei  $p$*  durch

$$\mu(p \mid a) := \max\{r \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \exists g \in K[x] \text{ mit } p = (x - a)^r g\}.$$

Beachte, dass  $\mu(p \mid a)$  für jedes  $a \in K$  definiert ist, und einfach 0 ist, wenn  $a$  keine Nullstelle von  $p$  ist.

**Korollar 1.59** (Anzahl Nullstellen). *Für  $f \in K[x]$  von Grad  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  existieren höchstens  $n$  verschiedene Zahlen  $a \in K$  mit  $f(a) = 0$ .*

*Beweis-Idee.* Falls  $\deg(f) = 0$  hat  $f$  keine Nullstellen. Nun nehme an, dass  $\deg(f) > 0$  und dass eine Nullstelle  $a \in K$  existiert und verwende dass ein Polynom  $g \in K[x]$  existiert mit  $f(x) = (x - a)g(x)$ .  $\square$

### 1.4.4 Polynome über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

#### Fundamentalsatz der Algebra

**Theorem 1.60** (Fundamentalsatz der Algebra). *Sei  $P \in \mathbb{C}[x]$  mit  $\deg(P) > 0$ . Dann existiert  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $P(\lambda) = 0$ .*

**Korollar 1.61.** *Sei  $P \in \mathbb{C}[x]$  mit  $\deg(P) = n > 0$  und Leitkoeffizient  $a \in \mathbb{C}$ . Dann existieren  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$  paarweise verschieden, so dass*

$$P = a(x - \lambda_1)^{l_1} \cdots (x - \lambda_k)^{l_k} = a \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{l_i}$$

und  $l_1 + \dots + l_k = \sum_{i=1}^k l_i = n$  gilt.

Dies bedeutet, dass alle Lösungen von Polynom-Gleichungen in  $\mathbb{C}$  enthalten sind.

## Reelle Polynome

**Lemma 1.62.** Sei  $P \in \mathbb{R}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  eine Nullstelle von  $P$ . Dann ist  $\bar{\lambda}$  (komplex Konjugierte von  $\lambda$ ) auch eine Nullstelle von  $P$ .

*Beweis-Idee.* Benutze die Eigenschaften der komplexen Konjugation:  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} : \overline{\alpha \cdot \beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} \wedge \overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} \wedge \bar{\bar{\alpha}} = \alpha \iff \alpha \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Lemma 1.63.** Sei  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  und  $q_\lambda := (x - \lambda)(x - \bar{\lambda})$ . Dann gilt  $q_\lambda \in \mathbb{R}[x]$ ,  $\deg(q_\lambda) = 2$  und  $q_\lambda$  hat keine reelle Nullstelle.

**Lemma 1.64.** Sei  $P \in \mathbb{R}[x]$  und  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Dann ist  $\mu(P \mid \lambda) = \mu(P \mid \bar{\lambda})$ .

**Korollar 1.65.** Für jedes  $P \in \mathbb{R}[x]$  existieren  $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  und  $\eta_1, \dots, \eta_k \in \mathbb{R}$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , so dass  $\{\eta_1, \dots, \eta_k, \lambda_1, \dots, \lambda_l\}$  alle Nullstellen von  $P$  sind und  $\deg(P) = k + 2l$ .

In anderen Worten, Nullstellen, die nicht reell sind, kommen in paaren  $\lambda$  und  $\bar{\lambda}$  vor.

**Korollar 1.66.** Sei  $P \in \mathbb{R}[x]$  und  $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\eta_1, \dots, \eta_k \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  wie in Korollar 1.65. Dann gilt

$$P(x) = (x - \eta_1) \cdots (x - \eta_k) \cdot q_{\lambda_1} \cdots q_{\lambda_l} = \prod_{i=1}^k (x - \eta_i) \prod_{i=1}^l q_{\lambda_i}$$

und dieses Produkt kann man nicht weiter in  $\mathbb{R}[x]$  zerlegen.

## 2 Vektorräume

**Definition 2.1** (Vektorraum). Ein *Vektorraum* über einem Körper  $K$  ist eine Menge  $(V, +, \cdot)$  mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V, (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2 \\ \cdot : K \times V &\rightarrow V, (a, v) \mapsto a \cdot v = av \end{aligned}$$

so dass folgende Axiome gelten:

$$(V1) \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V : v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$$

$$(V2) \quad \exists 0 = 0_V \in V \forall v \in V : 0 + v = v$$

$$(V3) \quad \forall v \in V \exists v' \in V : v + v' = 0$$

$$(V4) \quad \forall v_1, v_2 \in V : v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

$$(V5) \quad \forall a, b \in K, v \in V : a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$$

$$(V6) \quad \forall v \in V : 1 \cdot v = v$$

$$(V7) \quad \forall a \in K, v_1, v_2 \in V : a \cdot (v_1 + v_2) = a \cdot v_1 + a \cdot v_2$$

$$(V8) \quad \forall a_1, a_2 \in K, v \in V : (a_1 + a_2) \cdot v = a_1 \cdot v + a_2 \cdot v$$

**Lemma 2.2** (Folgerungen aus den Vektorraumaxiomen). Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $K$ . Dann gilt:

- (a) Der Nullvektor in (V2) ist eindeutig und wird mit  $0_V$  bezeichnet, wenn Verwechslungsgefahr besteht.
- (b) Die additive Inverse in (V3) ist eindeutig und wird mit  $-v$  bezeichnet. Damit bedeutet  $w - v := w + (-v)$  für  $w \in V$ .

- (c) Für alle  $v \in V$  gilt  $0 \cdot v = 0$  (oder präziser:  $0_K \cdot v = 0_V$ ).
- (d) Für alle  $a \in K$  gilt  $a \cdot 0 = 0$  (oder präziser:  $a \cdot 0_V = 0_V$ ).
- (e) Für alle  $v \in V$  gilt  $-1 \cdot v = -v$ .
- (f) Für alle  $v \in V$  gilt  $-(-v) = v$ .
- (g) Für alle  $a \in K, v \in V$  mit  $av = 0$  folgt, dass  $a = 0$  oder  $v = 0$ .
- (h) Assoziativität gilt für die Summe von  $n$  Elementen.

**Beispiel 2.3** (Der Koordinatenraum  $K^n$ ). Sei  $K$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}$ . Wir definieren den *Koordinatenraum* (über  $K$ ) durch

$$K^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in K, 1 \leq i \leq n\}$$

Die Addition auf  $K^n$  ist durch komponentenweise Addition definiert: Für  $v = (a_1, \dots, a_n)$  und  $w = (b_1, \dots, b_n) \in K^n$  definieren wir

$$v + w = (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n).$$

Skalarmultiplikation ist ebenfalls komponentenweise definiert: Für  $a \in K$  ist

$$a \cdot v = a \cdot (a_1, \dots, a_n) := (aa_1, \dots, aa_n).$$

Mit diesen Definitionen folgen alle Axiome der Vektorraumstruktur auf  $K^n$  aus den entsprechenden Axiomen der Körperstruktur auf  $K$ .

**Definition 2.5** (Untervektorraum). Sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$ . Eine Teilmenge  $W \subseteq V$  heisst ein *Untervektorraum* von  $V$ , falls das Folgende gilt:

- (UVR1)  $W$  ist nicht leer.
- (UVR2) Für alle  $w_1, w_2 \in W$  ist  $w_1 + w_2 \in W$ .
- (UVR3) Für alle  $a \in K, w \in W$  ist  $aw \in W$ .

**Übung 2.6.** Folgende Aussagen sind zu zeigen:

- (a) Sei  $0 \in V$  der Nullvektor und (UVR1') die Aussage  $0 \in W$ . Es gilt  $(\text{UVR1}') \wedge (\text{UVR2}) \wedge (\text{UVR3}) \iff (\text{UVR1}) \wedge (\text{UVR2}) \wedge (\text{UVR3})$ .
- (b)  $\forall a_1, a_2 \in K \forall w_1, w_2 \in W : a_1 w_1 + a_2 w_2 \in W \iff (\text{UVR2}) \wedge (\text{UVR3})$

**Lemma 2.7.** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$  und  $W \subseteq V$  ein Untervektorraum. Dann ist  $W$  auch ein Vektorraum über  $K$  mit der induzierten Addition und Skalarmultiplikation von  $V$ .

## 2.1 Ein Haufen Beispiele und ein bisschen Theorie

### Theorie-Intermezzo

**Definition 2.12** (Matrix). Sei  $K$  ein Körper und seien  $m, n \in \mathbb{N}$ . Eine  $m \times n$  *Matrix*

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

über  $K$  ist eine rechteckige Anordnung von Elementen in  $K$  mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten. Die Skalare  $a_{ij}$  heissen die *Einträge* der Matrix  $A$ . Wir schreiben  $M_{m \times n}(K)$  für die Menge aller  $m \times n$  Matrizen über  $K$ .

**Definition** (Matrix-Vektor Multiplikation). Sei  $A = (a_{ij})_{ij} \in M_{m \times n}(K)$  und  $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K_{Spal}^n$ . Wir definieren

$$Av = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Bemerke, dass  $Av \in K_{Spal}^m$ . Für alle  $v, w \in K_{Spal}^n$  und für alle  $a \in K$  gilt Folgendes:

$$A(v + w) = Av + Aw \text{ und } A(av) = aA(v).$$

**Definition 2.13.** Seien  $A \in M_{m \times n}(K), x \in K^n (= K_{Spal}^n)$  und  $b \in K^m (= K_{Spal}^m)$ . Eine Gleichung der Form  $Ax = b$  heisst ein *lineares Gleichungssystem* über  $K$ .

**Beispiel 2.15** (Lösungen von Linearen Gleichungssystemen). Sei  $A \in M_{m \times n}(K)$  und  $b \in K^m$ . Dann ist  $L = L_{A,b} = \{x \in K^n \mid Ax = b\} \subseteq K^n$  ein Untervektorraum genau dann, wenn  $b = 0 \in K^m$ .

## Folgenräume

Sei  $K$  ein Körper. Wir definieren den *Folgenraum*  $K^\infty$  durch  $K^\infty = \{(a_i)_{i=1}^\infty \mid a_i \in K, i = 1, 2, \dots\}$ . Die Addition und Skalarmultiplikation definieren wir folgendermassen:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots) + (b_1, b_2, \dots) &:= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots) \\ a \cdot (a_1, a_2, \dots) &:= (aa_1, aa_2, \dots). \end{aligned}$$

$K^\infty$  mit der Addition und Skalarmultiplikation ist ein Vektorraum.

## Untervektorräume von Folgenräumen

**Beispiel 2.20.** Sei  $\mathbf{Fib} = \{(a_i)_{i=1}^\infty \mid a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ für alle } n \geq 3\}$ . Dann ist  $\mathbf{Fib}$  ein Untervektorraum von  $K^\infty$ .

**Beispiel 2.22.** Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir  $W_n := \{(a_i)_{i=1}^\infty \mid a_i = 0 \text{ für alle } i > n\} \subseteq K^\infty$ . Es gilt  $W_n \subseteq W_m$  genau dann, wenn  $n \leq m$ . Wir definieren  $W_\infty := \bigcup_{n \geq 1} W_n$ . (**Übung 2.23**) Es gilt  $W_\infty = \{(a_i)_{i=1}^\infty \mid \exists M \in \mathbb{N} \forall i > M : a_i = 0\}$ .  $W_\infty$  ist ein Untervektorraum und heisst *Raum der Folgen mit endlichem Träger*.

## Funktions-Räume

Sei  $K$  ein Körper, und sei  $S$  eine nicht leere Menge. Wir definieren

$$K^S = \text{Abb}(S, K) = \{f : S \leftarrow K \mid f \text{ ist eine funktion}\}.$$

Um  $K^S$  mit einer Vektorraumstruktur zu versehen definieren wir eine Addition und Skalarmultiplikation für  $f, g \in K^S$  und  $a \in K$ :

$$\begin{aligned} (f +_{K^S} g)(x) &= f(x) +_K g(x) \\ (a \cdot_{K^S} f)(x) &= a \cdot_K f(x). \end{aligned}$$

## Polynomräume

Sei  $K$  ein Körper. Auf  $K[x]$  wurde die Addition bereits in Bemerkung 1.48 definiert. Seien  $a \in K$  und  $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in K[x]$ , dann definieren wir die Skalarmultiplikation:

$$a \cdot f = a \cdot (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) := aa_0 + aa_1x + \dots + aa_nx^n.$$

Mit dieser Addition und Skalarmultiplikation ist  $K[x]$  ein Untervektorraum von  $K^K$ .

Weiter kann man mit **Matrizenräumen** und der **Potenzmenge** Vektorräume definieren.

## 2.2 Zurück zur Theorie

### 2.2.1 Span und Linearkombinationen

**Lemma 2.34.** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$ ,  $I$  eine Indexmenge und  $(W_i)_{i \in I}$  eine Familie von Untervektorräumen. Dann ist  $W = \bigcap_{i \in I} W_i$  ein Untervektorraum.

**Definition 2.35** (Erste Definition des Spans). Sei  $S \subseteq V$ . Wir definieren den *Span*  $\text{Sp}(S)$  von  $S$  durch  $\text{Sp}(S) := \bigcap_{W \in \mathcal{N}} W$ , wobei  $\mathcal{N} = \{W \mid S \subseteq W, W \text{ ein Untervektorraum von } V\}$ .

**Lemma 2.36.** Sei  $S \subseteq V$  eine Teilmenge. Dann ist  $\text{Sp}(S)$  der kleinste Untervektorraum, der  $S$  enthält. Das heisst, es gilt:

(1)  $\text{Sp}(S)$  ist ein Untervektorraum.

(2) Wenn  $S \subseteq W$  für  $W \subseteq V$  ein Untervektorraum, dann ist  $\text{Sp}(S) \subseteq W$ .

**Definition 2.37.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  (endlich!) und seien  $a_1, \dots, a_n \in K$  und  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Ein Vektor  $v \in V$  der Form  $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n = \sum_{i=1}^n a_iv_i$  heisst eine *Linearkombination* von  $v_1, \dots, v_n$  (über  $K$ ). Die Skalare  $a_1, \dots, a_n$  heissen die *Koeffizienten* der Linearkombination.

**Lemma 2.39** (Äquivalente Definition des Spans). Sei  $S \subseteq V$  eine (nicht leere) Teilmenge:

$$\begin{aligned} \text{Sp}(S) &= \{a_1v_1 + \dots + a_nv_n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in K, v_i \in S \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\} \\ &= \{\text{alle Linearkombinationen von Vektoren aus } S\}. \end{aligned}$$

(Definition 2.41) Beachte, dass  $\text{Sp}(v_1, \dots, v_n) := \text{Sp}(\{v_1, \dots, v_n\})$ .

**Definition 2.34.** Wir sagen, dass  $V$  von  $S \subseteq V$  erzeugt wird, falls  $\text{Sp}(S) = V$ . („ $S$  spannt  $V$  auf“, „ $S$  ist ein Erzeugendensystem von  $V$ ). Dasselbe gilt für Untervektorräume.

**Definition 2.44.** Ein Vektorraum  $V$  heisst *endlich-dimensional*, falls es  $S \subseteq V$  gibt, so dass  $|S| < \infty$  und  $\text{Sp}(S) = V$ .

### 2.2.2 Beispiele

**Lemma 2.50.** Sei  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(K)$  und  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ . Wir definieren die Spaltenvektoren  $v_1, \dots, v_n$  in  $K^m$  durch die Spalten von  $A = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$ . Dann gilt:

$$Ax = x_1 \cdot \begin{pmatrix} | \\ v_1 \\ | \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} | \\ v_2 \\ | \end{pmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{pmatrix} | \\ v_n \\ | \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_iv_i.$$

Seien  $v_1, \dots, v_n \in K^m$  und  $w \in K^m$ . Um herauszufinden ob  $w \in \text{Sp}(v_1, \dots, v_n)$  ist, betrachte die Matrix  $A = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$  und das Gleichungssystem  $Ax = w$ .

### 2.2.3 Lineare Unabhängigkeit und die Definition einer Basis

#### Lineare Unabhängigkeit

**Definition 2.57.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Eine endliche Menge  $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$  ist *linear unabhängig*, falls aus  $a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0$  für  $a_1, \dots, a_n \in K$  stets folgt, dass  $a_1 = 0, \dots, a_n = 0$ .

Dies besagt, dass  $v_1, \dots, v_n$  genau dann linear unabhängig sind, wenn  $0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n = 0$  die einzige Beschreibung des Nullvektors als Linearkombination von  $v_1, \dots, v_n$  ist.

**Definition 2.59.** Eine nichtleere Menge  $S \subseteq V$  heisst *linear unabhängig*, falls jede endliche nichtleere Teilmenge von  $S$  linear unabhängig ist.

**Definition 2.62.** Eine Menge heisst *linear abhängig*, falls sie nicht linear unabhängig ist.

**Definition 2.63.** Die *triviale Linearkombination* von  $v_1, \dots, v_n$  ist  $0 = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n$ .

**Definition 2.64.** Eine nichtleere Menge  $S \subseteq V$  heisst *linear abhängig*, wenn es paarweise verschiedene  $v_1, \dots, v_n \in S$  gibt und  $a_1, \dots, a_n \in K$ , die nicht alle Null sind, so dass  $a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0$ .

**Lemma 2.66.** Sei  $S$  linear unabhängig und  $\emptyset \neq S' \subseteq S$ . Dann ist auch  $S'$  linear unabhängig.

**Definition 2.67.** Eine Menge  $S \subseteq V$  heisst eine *Basis* (für  $V$ ), falls  $S$  linear unabhängig ist und  $V$  von  $S$  erzeugt wird.

**Proposition 2.68.** Eine Menge  $S \subseteq V$  ist eine Basis von  $V$  genau dann, wenn jedes  $v \in V$  in einer eindeutigen Weise als Linearkombination von Vektoren aus  $S$  geschrieben werden kann.

### 2.3 Endlich-dimensionale Vektorräume

**Lemma 2.72.** Seien  $v_1, \dots, v_m$  linear abhängig in  $V$ . Dann existiert ein  $1 \leq j \leq m$  mit

(a)  $v_j \in \text{Sp}(v_1, \dots, v_{j-1})$  und

(b)  $\text{Sp}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_m) = \text{Sp}(v_1, \dots, v_m)$ .

**Lemma 2.74.** Angenommen wir haben in Lemma 2.72 zusätzlich die Bedingung, dass  $v_1, \dots, v_k$  für  $k < m$  linear unabhängig sind. Dann gilt  $k < j$ .

**Lemma 2.75.** Seien  $w_1, \dots, w_n \in V$  mit  $\text{Sp}(w_1, \dots, w_n) = V$  und  $v \in V$ . Dann sind  $v, w_1, \dots, w_n$  linear abhängig.

**Lemma 2.76.** Seien  $v_1, \dots, v_n \in V$  mit  $\text{Sp}(v_1, \dots, v_n) = V$  und seien  $u_1, \dots, u_m \in V$  linear unabhängig. Dann gilt  $m \leq n$ .

**Theorem 2.78.** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper  $K$ . Dann hat  $V$  eine Basis mit endlicher Länge. Ausserdem hat jede Basis von  $V$  die gleiche Länge.

**Lemma 2.79.** Sei  $v_1, \dots, v_n$  ein Erzeugendensystem. Dann enthält  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis.

**Lemma 2.80.** Seien  $w_1, \dots, w_l \in V$ , so dass  $w_j \notin \text{Sp}(w_1, \dots, w_{j-1})$  für alle  $1 \leq j \leq l$  ist. Dann sind  $w_1, \dots, w_l$  linear unabhängig.

**Definition 2.81** (Dimension). Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Wir definieren die Dimension von  $V$  als  $\dim V = n$ , wobei  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  die Länge einer Basis von  $V$  ist.

**Theorem 2.83** (Hamel Basis). Jeder Vektorraum über  $K$  hat eine Basis. Je zwei Basen haben die gleiche Kardinalität.

**Lemma 2.84.** Jede linear unabhängige Teilmenge von  $V$  kann man zu einer Basis von  $V$  erweitern.

### 2.3.1 Gleichgewicht

#### Maximale linear unabhängige Mengen und minimale Erzeugendensysteme

**Satz 2.85.** Sei  $V$  ein Vektorraum mit  $\dim V = n$ , wobei  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Für eine Liste  $v_1, \dots, v_n \in V$  der Länge  $n$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) Die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  sind linear unabhängig.
- (2) Die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  sind erzeugend.
- (3) Die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  bilden eine Basis.

**Korollar 2.87** (Fehlendes Gleichgewicht). Sei  $n = \dim V < \infty$ .

- (a) Eine Menge  $v_1, \dots, v_k$  mit  $k < n$  ist nicht erzeugend.
- (b) Eine Menge  $v_1, \dots, v_k$  mit  $n < k$  ist linear abhängig.

Aus Lemma 2.50 folgt, dass  $v_1, \dots, v_n \in K^m$  linear unabhängig sind genau dann, wenn

$$\left( \begin{array}{c|c|c|c} | & | & \dots & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^m$$

nur die triviale Lösung  $x_1 = \dots = x_n = 0$  hat, was man mit Gauss bestimmen kann.  $v_1, \dots, v_n$  ist eine Basis von  $K^m$ , falls  $n = m$  und obige Gleichung nur die triviale Lösung.

### 2.3.2 Basen von Vektorräumen ohne Gaussische Elimination

**Korollar 2.90.** Jeder Untervektorraum hat eine Basis.

**Proposition 2.91.** Seien  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum und  $U$  ein Untervektorraum. Dann ist  $U$  auch endlich-dimensional und  $\dim U \leq \dim V$ . Ausserdem gilt  $\dim U = \dim V$  genau dann, wenn  $U = V$  ist.

### 2.3.3 Zeilen- und Spaltenraum und die Gaussische Elimination

**Definition 2.91** (Zeilen- & Spaltenraum). Sei  $A \in M_{m \times n}(K)$  und seien  $u_1, \dots, u_m \in K^m$  die Zeilen der Matrix und  $v_1, \dots, v_n \in K^m$  die Spalten der Matrix. Wir definieren

$$\text{ZR}(A) = \text{Zeilenraum}(A) = \text{Sp}(u_1, \dots, u_m) \subseteq K^m$$

$$\text{SR}(A) = \text{Spaltenraum}(A) = \text{Sp}(v_1, \dots, v_n) \subseteq K^m.$$

**Lemma 2.93.** Seien  $A, B \in M_{m \times n}(K)$ , so dass  $B$  durch Zeilenoperationen aus  $A$  entstanden ist. Dann gilt  $\text{ZR}(A) = \text{ZR}(B)$ . Aber  $\text{SR}(A) = \text{SR}(B)$  gilt dann nicht unbedingt!

**Definition 2.95** (Spalten- & Zeilenrang). Seien  $n, m \in \mathbb{N}$  und  $A \in M_{m \times n}(K)$ . Wir definieren den *Spaltenrang* und den *Zeilenrang* von  $A$  durch

$$\begin{aligned}\text{Spaltenrang}(A) &:= \dim \text{SR}(A), \\ \text{Zeilenrang}(A) &:= \dim \text{ZR}(A).\end{aligned}$$

**Lemma 2.97.** Sei  $B \in M_{m \times n}(K)$  eine Matrix in Zeilenstufenform. Dann sind die Zeilen, die keine Nullzeilen sind, eine Basis des Zeilenraums  $\text{ZR}(B)$ . Insbesondere gilt  $\dim \text{ZR}(B) = \text{Rang}(B)$ . Ähnlich gilt: Die Spalten, die die Pivots enthalten, sind eine Basis des Spaltenraums. Insbesondere gilt  $\text{Spaltenrang}(B) = \text{Zeilenrang}(B)$ .

*Bemerkung.* Für eine Matrix  $A$  ist  $\text{Rang}(A)$  die Anzahl der Pivots einer Matrix in Zeilenstufenform, die durch Zeilenoperationen auf  $A$  entstanden ist.

**Korollar 2.98.** Der Rang einer Matrix  $A$  ist wohl-definiert. Das heisst, der Rang hängt nicht von den Zeilenoperationen ab, die zur Stufenform führen.

**Korollar 2.99** (Algorithmus zur Berechnung einer Basis aus einem Erzeugendensystem in  $K^n$ ). Sei  $U = \text{Sp}(u_1, \dots, u_m) \subseteq K^n$ . Um eine Basis für  $U$  zu finden, schreibt man  $u_1, \dots, u_m$  als Zeilen einer Matrix  $A \in M_{m \times n}(K)$ . Mit Zeilenoperationen führt man  $A$  zu einer Matrix  $B$  in Zeilenstufenform über. Dann sind die Zeilen von  $B$ , die keine Nullzeilen sind, eine Basis von  $U$ .

**Definition 2.100** (Transposition). Sei  $A = (a_{ij})_{ij} \in M_{m \times n}(K)$ . Wir definieren die *Transponierte* von  $A$  als die Matrix

$$A^T = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in M_{m \times n}(K)$$

mit  $b_{ij} = a_{ji}$ . Sei  $1 \leq k \leq n$ . Dann gelten folgende Eigenschaften:

- Die  $k$ -te Zeile von  $A^T$  ist die  $k$  te Spalte von  $A$ .
- Die  $k$ -te Spalte von  $A^T$  ist die  $k$  te Zeile von  $A$ .
- $(A + B)^T = A^T + B^T$ .
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ .
- $(A^T)^T = A$ .
- $\text{SR}(A) = \text{ZR}(A^T)$ .
- $\text{ZR}(A) = \text{SR}(A^T)$ .
- Spaltenoperationen auf  $A$  sind dasselbe wie Zeilenoperationen auf  $A^T$ .

**Satz 1.102.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $A \in M_{m \times n}(K)$ . Es gilt  $\text{Spaltenrang}(A) = \text{Zeilenrang}(B)$ .

**Korollar 2.104.** Sei  $A$  eine Matrix und  $j_1, \dots, j_r$  die Indizes der Spalten mit Pivots einer Matrix, die aus  $A$  durch Zeilenoperationen in Stufenform gebracht wurde. Seien  $A^{(i)}$  die Spalten von  $A$ . Dann ist  $\{A^{(j_1)}, \dots, A^{(j_r)}\}$  eine Basis des Spaltenraums von  $A$ . Dies zeigt auch  $\dim \text{Spaltenraum}(A) = \dim \text{Zeilenraum}(A)$ .

### 2.3.4 Summen

**Definition 2.106** (Summe). Wir definieren für Untervektorräume  $U_1, \dots, U_n$  von  $V$  die *Summe* von  $U_1, \dots, U_n$  als  $U_1 + \dots + U_n = \{u_1 + \dots + u_n \mid u_i \in U_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}$ .

**Proposition 2.107.** Seien  $U, W \subseteq V$  zwei Untervektorräume. Es gilt

- (1)  $U + W = \text{Sp}(U \cup W)$  und damit ist  $U + W$  der kleinste Untervektorraum, der  $U$  und  $W$  enthält.

(2) Falls  $U+W$  endlich-dimensional ist, dann kann man folgendermassen eine Basis von  $U+W$  bilden: Seien  $k = \dim(U \cap W)$ ,  $l = \dim(U)$  und  $m = \dim W$ .

(a) Man wählt eine Basis  $p_1, \dots, p_k$  von  $U \cap W$ .

(b) Man wählt eine Basis  $p_1, \dots, p_k, u_1, \dots, u_{l-k}$  für  $U$  und eine Basis  $p_1, \dots, p_k, w_1, \dots, w_{m-k}$  für  $W$ .

Dann ist  $p_1, \dots, p_k, u_1, \dots, u_{l-k}, w_1, \dots, w_{m-k}$  eine Basis für  $U+W$ .

(3) Insbesondere gilt die sogenannte Dimensionsformel:

$$\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W.$$

## Direkte Summen

**Proposition 2.110.** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum über  $K$  und seien  $U, W \subseteq V$  zwei Untervektorräume. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) Es gilt  $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$ .

(2) Es gilt  $\dim(U \cap W) = 0$ .

(3) Es gilt  $U \cap W = \{0\}$ .

(4) Jedes  $v \in U+W$  ist eindeutig darstellbar als  $v = u + w$  mit  $u \in U$  und  $w \in W$ .

(5) Falls  $0 = u + w$  mit  $u \in U$  und  $w \in W$ , dann ist  $u = 0$  und  $w = 0$ .

### Übung 3.60:

(6) Sei  $A \in M_{m \times n}(K)$  und  $B \in M_{n \times p}(K)$ . Dann gilt  $(AB)^T = B^T A^T$ .

(7) Sei  $A \in \text{GL}_n(K)$ . Es gilt  $A^T \in \text{GL}_n(K)$  und  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

**Definition 2.111** (Direkte Summe). Falls eine der äquivalenten Bedingungen in Proposition 1.110 gilt, dann sagen wir, dass  $U+W$  die *direkte Summe* von  $U$  und  $W$  ist und schreiben  $U+W = U \oplus W$ .

**Proposition 2.112.** Seien  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum und  $U$  ein Untervektorraum. Dann existiert ein Untervektorraum  $W$  mit  $V = U \oplus W$ .

**Definition 2.113** (Komplement). Ein Untervektorraum  $W$  wie in Proposition 2.112 wird ein *Komplement* von  $U$  in  $V$  genannt (oder auch ein *direkter Summand* von  $V$  zu  $U$ ).

## 3 Lineare Abbildungen

### 3.1 Definition einer linearen Abbildung

**Definition 3.1** (Lineare Abbildung). Seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über einem Körper  $K$ . Eine Funktion  $T : V \rightarrow W$  heisst *linear* (oder *lineare Abbildung/Transformation*), falls folgende zwei Eigenschaften gelten:

$$\forall v_1, v_2, \in V : T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \quad (\text{Additivität})$$

$$\forall a \in K, v \in V : T(av) = aT(v) \quad (\text{Homogenität})$$

Die Menge aller linearen Abbildungen von  $V$  nach  $W$  bezeichnen wir mit  $\text{Hom}_K(V, W)$ .

**Übung 3.2.**  $T$  ist linear  $\iff \forall a, b \in K, v_1, v_2 \in V : T(av_1 + bv_2) = aT(v_1) + bT(v_2)$ .

**Proposition 3.14.** Seien  $V$  und  $W$  zwei Vektorräume über einem Körper  $K$  und  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen:

(1) Für alle  $a_1, \dots, a_n \in K$  und  $v_1, \dots, v_n \in V$  gilt

$$T\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i T(v_i).$$

Das heisst, dass das Bild einer Linearkombination der  $v_i$  Koeffizienten  $a_i$  eine Linearkombination der  $T(v_i)$  mit Koeffizienten  $a_i$  ist.

(2) Es gilt  $T(0) = 0$ .

**Satz 3.15.** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum und  $v_1, \dots, v_n \in V$  eine **Basis** von  $V$ . Seien  $w_1, \dots, w_n \in W$  **beliebige** Vektoren. Dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung  $T : V \rightarrow W$  mit  $T(v_i) = w_i$  für  $i = 1, \dots, n$ .

**Lemma 3.18.** Für jede lineare Abbildung  $T : K^n \rightarrow K^m$  existiert ein eindeutiges  $A \in M_{m \times n}(K)$ , so dass  $T = m_A$ . Nämlich

$$A = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ T(e_1) & T(e_1) & \dots & T(e_n) \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}.$$

## 3.2 Kern und Bild

**Proposition 3.19** (Kern & Bild). Sei  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung.

- (1) Die Menge  $\text{Ker}(T) = \{v \in V \mid Tv = 0_W\}$  ist ein Untervektorraum von  $V$  und heisst der Kern von  $T$ . Mit  $f^{-1}(b) = \{\text{alle Urbilder von } b\}$  einer Funktion  $f$  ist  $\text{Ker}(T) = T^{-1}(0_W)$ .
- (2) Das Bild von  $T$ ,  $\text{Im}(T) = \{Tv \mid v \in V\}$  ist ein Untervektorraum von  $W$ .

**Proposition 3.21.** Sei  $T$  eine lineare Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen:

- (1)  $T$  ist injektiv  $\iff \text{Ker}(T) = \{0_V\}$ .
- (2)  $T$  ist surjektiv  $\iff \text{Im}(T) = W$ .

**Definition 3.23** (Morphismus). Eine lineare Abbildung  $T : V \rightarrow W$  nennen wir

- einen *Isomorphismus*, falls  $T$  bijektiv ist.
- einen *Endomorphismus*, falls  $W = V$  ist.
- einen *Automorphismus*, falls  $V = W$  und  $T$  bijektiv ist.

Falls ein Isomorphismus  $T : V \rightarrow W$  existiert, sagen wir, dass  $V$  und  $W$  *isomorph* sind und schreiben  $V \cong W$ . Die Menge aller Endomorphismen von  $V$  bezeichnen wir mit  $\text{End}(V)$ . Das heisst,  $\text{End}(V) := \text{Hom}(V, V)$ .

**Lemma 3.24.** Falls  $T : V \rightarrow W$  ein Isomorphismus ist, dann existiert  $T^{-1} : W \rightarrow V$  und ist auch linear.

**Lemma 3.26.** Sei  $T : V \rightarrow W$  linear und  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis für  $V$ . Dann gilt  $\text{Im}(T) = \text{Sp}(Tv_1, \dots, Tv_n)$ .

**Satz 3.27** (Rangsatz). Sei  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen  $V$  und  $W$ , wobei  $V$  endlich-dimensional ist. Dann gilt  $\dim \text{Ker}(T) + \dim \text{Im}(T) = \dim V$ .

**Korollar 3.29.** Sei  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen:

- (1) Falls  $\dim W < \dim V$ , dann ist  $T$  nicht injektiv.

(2) Falls  $\dim W > \dim V$ , dann ist  $T$  nicht surjektiv.

(3) Falls  $\dim W = \dim V$ , dann gilt:  $T$  ist bijektiv  $\iff T$  ist injektiv  $\iff T$  ist surjektiv.

**Lemma 3.30.** Seien  $T : V \rightarrow W$  und  $S : W \rightarrow U$  lineare Abbildungen. Dann ist die Verkettung  $S \circ T : V \rightarrow U$  auch linear.

**Korollar 3.32.** Zwei endlich-dimensionale Vektorräume  $V$  und  $W$  sind genau dann isomorph, wenn  $\dim V = \dim W$ .

**Definition 3.33** (Rang). Sei  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Der Rang von  $T$  ist  $\text{Rang}(T) := \dim \text{Im}(T)$ .

### 3.3 Koordinaten für Vektorräume und lineare Abbildungen

**Definition 3.35** (Koordinaten-Vektor). Sei  $V$  ein Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  und sei  $v \in V$ . Wir definieren den *Koordinaten-Vektor* von  $v$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$  als

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

wobei  $a_1, \dots, a_n \in K$  sind mit  $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ . Da  $\mathcal{B}$  eine Basis ist, sind  $a_1, \dots, a_n$  eindeutig definiert, und daher ist  $[v]_{\mathcal{B}}$  wohl-definiert. Die Abbildung  $\Phi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow K^n, v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$  nennen wir die *Koordinaten-Abbildung* bezüglich  $\mathcal{B}$ .

**Proposition 3.36.** Die Abbildung  $\Phi_{\mathcal{B}}$  ist linear und bijektiv.

*Bemerkung.* Bemerke, dass die Inverse  $\Phi_{\mathcal{B}}^{-1} : K^n \rightarrow V$  gegeben ist durch:

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n.$$

$\Phi_{\mathcal{B}}$  ist die eindeutige lineare Abbildung von  $V$  nach  $K^n$ , die durch Satz 3.15 mit der Bedingung  $\Phi_{\mathcal{B}}(v_i) = e_i \in K^n$  definiert ist, wobei  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  und  $(e_1, \dots, e_n)$  die Standard-Basis von  $K^n$  ist.

**Satz 3.39.** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$  mit  $\dim V = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Dann ist  $V$  isomorph zu  $K^n$ .

#### 3.3.1 Matrizen und lineare Abbildungen

**Definition 3.41** (Darstellungsmatrix). Sei  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung,  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  eine Basis des Vektorraums  $V$  und  $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$  eine Basis des Vektorraums  $W$ .

$$\begin{array}{ccc} v_i \in V & \xrightarrow{T} & W \ni T v_i \\ \uparrow \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} & & \downarrow \Phi_{\mathcal{C}} \\ e_i \in K^n & \xrightarrow{m_A} & K^m \ni [T v_i]_{\mathcal{C}} \end{array}$$

Die Matrix  $A = \left( \begin{array}{c|c} | & | \\ [T(v_1)]_{\mathcal{C}} & \dots & [T(v_n)]_{\mathcal{C}} \\ | & | \end{array} \right) \in M_{m \times n}(K)$  heisst die *Darstellungsmatrix* von  $T$  bezüglich der Basen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  und wird mit  $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  notiert.

**Proposition 3.42.** Sei  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen  $V$  und  $W$ . Sei  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$  und  $\mathcal{C}$  eine Basis von  $W$ . Für jedes  $v \in V$  gilt  $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [Tv]_{\mathcal{C}}$ .

### 3.3.2 Matrizen

**Definition 3.46.** Seien  $m, n, p \in \mathbb{N}$ . Die Matrixmultiplikation ist die Abbildung

$$\cdot : M_{m \times n}(K) \times M_{n \times p}(K) \rightarrow M_{m \times p}(K),$$

$$(A, B) = \left( (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right) \mapsto A \cdot B,$$

wobei  $A \cdot B = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$  mit  $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ . Wir schreiben oft  $AB$  statt  $A \cdot B$ .

*Bemerkung.*  $AB$  ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von  $A$  der Anzahl Zeilen von  $B$  entspricht.

$$\begin{array}{ccc}
 & & j\text{-te Spalte} \\
 & & \left( \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right) \\
 & & \left( \begin{array}{c} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{array} \right) \\
 & & \dots \\
 & & \downarrow \\
 i\text{-te Zeile} & \left( \begin{array}{c} \vdots \\ (a_{i1} \dots a_{in}) \\ \vdots \end{array} \right) & \rightarrow \left( \begin{array}{c} \vdots \\ \dots \quad c_{ij} \quad \dots \\ \vdots \end{array} \right)
 \end{array}$$

**Definition 3.51** (Kronecker-Delta). Wir definieren das *Kronecker-Delta* mit  $i, j$  in einer Indexmenge als

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}.$$

**Definition** (Einheitsmatrix). Wir definieren die *Einheitsmatrix*  $I_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  als

$$I_n = (\delta_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{n \times n}(K).$$

**Proposition 3.52.** *Es gilt:*

- (1) (*Assoziativität*) Für  $A \in M_{m \times n}(K), B \in M_{n \times p}(K), C \in M_{p \times q}(K)$  gilt  $(AB)C = A(BC)$ .
- (2) (*Distributivität*) Für  $A, B \in M_{m \times n}(K)$  und  $C \in M_{n \times p}(K), C' \in M_{q \times m}(K)$  gilt  $(A+B)C = AC + BC$  und  $C'(A+B) = C'A + C'B$ .
- (3) Für alle  $A \in M_{m \times n}(K)$  gilt  $I_m A = A$  und  $A I_n = A$ .
- (4) Für alle  $\alpha \in K, A \in M_{m \times n}(K)$  und  $B \in M_{n \times p}(K)$  gilt  $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ .

*Bemerkung.* Die Menge  $M_{n \times n}(K)$  für  $n \in \mathbb{N}$  ist ein (nicht-kommutativer) Ring mit  $I_n$  als Eins.

**Definition 3.54** (Inverse). Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Eine Matrix  $A \in M_{n \times n}(K)$  heisst *invertierbar*, falls eine Matrix  $B \in M_{n \times n}(K)$  existiert, so dass  $AB = I_n$  und  $BA = I_n$  gilt. Die Matrix  $B$  heisst die *Inverse* von  $A$  und wird mit  $A^{-1}$  notiert. Die Menge aller invertierbaren Matrizen in  $M_{n \times n}(K)$  bezeichnen wir mit  $GL_n(K)$  oder  $GL(n, K)$  und nennen sie die *allgemeine lineare Gruppe* über  $K$  (von Grad  $n$ ).

**Proposition 3.55.** *Die allgemeine lineare Gruppe ist eine Gruppe bezüglich Matrixmultiplikation.*

**Korollar 3.56.** (1) *Die Inverse von  $A$  ist eindeutig definiert*

- (2) *Es gilt  $(A^{-1})^{-1} = A$ .*
- (3) *Es gilt  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .*

**Korollar 3.58.** *Sei  $Ax = b$  ein lineares Gleichungssystem mit  $A \in M_{n \times n}(K)$ . Falls  $A \in GL_n(K)$  ist, dann hat  $Ax = b$  für jedes  $b \in K^n$  eine eindeutige Lösung  $x$ , nämlich  $x = A^{-1}b$ .*

### 3.3.3 Zurück zu Darstellungen linearer Abbildungen

**Lemma 3.61.** Seien  $V, W$  und  $U$  drei endlich-dimensionale Vektorräume über  $K$  mit jeweiligen Basen  $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_m), \mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n), \mathcal{C} = (u_1, \dots, u_p)$ . Wir betrachten  $T \in \text{Hom}(V, W)$  und  $S \in \text{Hom}(W, U)$ . Dann gilt  $[S \circ T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} = [S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ , wobei  $\cdot$  die Matrixmultiplikation bezeichnet.

**Korollar 3.62.** Sei  $T \in \text{Hom}(V, W), \mathcal{B}, \mathcal{B}'$  zwei Basen von  $V$  und  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  zwei Basen von  $W$ . Dann gilt  $[T]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'} = [\text{Id}_W]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [\text{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ .

**Korollar 3.63.** Seien  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{B}'$  zwei Basen von  $V$  und  $n = \dim V$ . Matrizen der Form  $[\text{Id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \in \text{GL}_n(K)$  heißen Basiswechselmatrizen und sind invertierbar:  $([\text{Id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{-1} = [\text{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ .

**Korollar 3.64.** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit zwei Basen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{B}'$  und  $T \in \text{End}(V)$ . Dann gilt  $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = [\text{Id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} [\text{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = ([\text{Id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{-1} [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} [\text{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ .

*Bemerkung.* Für  $T \in \text{End}(V)$  schreibt man manchmal  $[T]_{\mathcal{B}} := [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ .

**Korollar 3.65.** Seien  $A \in M_{m \times n}(K)$  und  $B \in M_{n \times p}(K)$ , dann gilt  $m_A \circ m_B = m_{AB}$ .

**Definition 3.67.** • Zwei Matrizen  $A, B \in M_{m \times n}(K)$  heißen äquivalent, falls es  $P \in \text{GL}_m(K)$  und  $Q \in \text{GL}_n(K)$  gibt, so dass  $PAQ = B$ .

• Zwei Matrizen  $A, B \in M_{n \times n}(K)$  heißen ähnlich, falls es  $P \in \text{GL}_n(K)$  gibt, so dass  $P^{-1}AP = B$ .

Äquivalenz bzw. Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation auf  $M_{m \times n}(K)$  bzw.  $M_{n \times n}(K)$ .

•  $A$  ist äquivalent zu  $B$  genau dann, wenn es Vektorräume  $V, W, T \in \text{Hom}(V, W)$  und Basen  $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subseteq V, \mathcal{C}, \mathcal{C}' \subseteq W$  gibt, so dass  $A = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  und  $B = [T]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}$ .

•  $A$  ist ähnlich zu  $B$  genau dann, wenn es einen Vektorraum  $V, T \in \text{End}(V)$  und Basen  $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subseteq V$  gibt, so dass  $A = [T]_{\mathcal{B}}$  und  $B = [T]_{\mathcal{B}'}$ .

Sei  $D_r = (d_{ij})_{ij} \in M_{m \times n}(K)$  die Matrix mit

$$\begin{cases} d_{ij} = 0, & \text{falls } i \neq j \\ d_{ii} = 1, & \text{falls } 1 \leq i \leq r \\ d_{ii} = 0, & \text{falls } r < i \end{cases}$$

Das heisst, dass  $D_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{m-r, r} & 0_{m-r, n-r} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(K)$ , wobei  $0_{l,k} \in M_{l \times k}(K)$  die Nullmatrix ist.

**Proposition 3.69.** Sei  $T \in \text{Hom}(V, W)$  mit  $\text{Rang}(T) = r$ . Dann existieren Basen  $\mathcal{B}$  von  $V$  und  $\mathcal{C}$  von  $W$ , so dass  $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = D_r$ .

**Lemma 3.70.** Sei  $A \in M_{m \times n}(K)$ . Dann gilt  $\text{SR}(A) = \text{Im}(m_A)$ .

**Proposition 3.71.** Sei  $A \in M_{m \times n}(K)$ . Dann existieren  $P \in \text{GL}_m(K)$  und  $Q \in \text{GL}_n(K)$  mit  $PAQ = D_r$  wobei  $r = \text{Spaltenrang}(A)$ .

**Korollar 3.72.** Es gibt  $\min(m, n) + 1$  Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation Äquivalenz auf  $M_{m \times n}(K)$  mit  $D_r$  für  $r = 0, \dots, \min(m, n)$  als Repräsentanten.

**Korollar 3.74.** Sei  $T : V \rightarrow W$  ein Isomorphismus und  $\mathcal{B} \subseteq V, \mathcal{C} \subseteq W$  zwei Basen. Dann gilt  $[T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = ([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})^{-1}$ . Insbesondere ist  $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  invertierbar.

### 3.4 Spaltenrang ist gleich Zeilenrang

**Satz 3.75.** Sei  $A \in M_{m \times n}(K)$ . Dann gilt  $\text{Spaltenrang}(A) = \text{Zeilenrang}(A)$ . Also gilt  $\text{Rang}(A) = \text{Spaltenrang}(A) = \text{Zeilenrang}(A)$  ist gleich der Anzahl Pivots einer Zeilenäquivalenten Stufenform Matrix.

**Lemma 3.76.** Sei  $T \in \text{Hom}(V, W)$  und seien  $S : W \rightarrow U$  und  $L : P \rightarrow V$  zwei Isomorphismen. Dann gilt  $\text{Rang}(S \circ T) = \text{Rang}(T \circ L) = \text{Rang}(T)$ . Insbesondere gilt auch  $\text{Rang}(S \circ T \circ L) = \text{Rang}(T)$ .

**Lemma 3.77.** Sei  $A \in M_{n \times n}(K)$ . Dann gilt, dass  $A \in \text{GL}_n(K)$  genau dann, wenn  $m_A : K^n \rightarrow K^n$  ein Isomorphismus ist.

**Lemma 3.78.** Seien  $A, B \in M_{m \times n}(K)$  mit  $B = PAQ$ , wobei  $P \in \text{GL}_m(K)$  und  $Q \in \text{GL}_n(K)$ . Dann gilt  $\text{Spaltenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(B)$  und  $\text{Zeilenrang}(A) = \text{Zeilenrang}(B)$ .

### 3.5 $\text{Hom}(V, W)$ als Vektorraum

Seien  $T, S \in \text{Hom}(V, W)$ . Wir definieren Addition auf  $\text{Hom}(V, W)$ ,  $T + S : V \rightarrow W$ :

$$(T + S)(v) := T(v) +_W S(v).$$

Sei  $\alpha \in K$  und  $T \in \text{Hom}(V, W)$ . Wir definieren Skalarmultiplikation auf  $\text{Hom}(V, W)$ ,  $\alpha T : V \rightarrow W$ :

$$(\alpha T)(v) := \alpha \cdot_W T(v).$$

**Lemma 3.80.** Für  $T, S \in \text{Hom}(V, W)$  und  $\alpha \in K$  gilt, dass  $T + S \in \text{Hom}(V, W)$  und  $\alpha T \in \text{Hom}(V, W)$ .

**Proposition 3.81.**  $\text{Hom}(V, W)$  mit der obigen Addition und Skalarmultiplikation ist ein Vektorraum.

**Satz 3.82.** Seien  $V$  und  $W$  zwei Vektorräume mit  $\dim V = n$  und  $\dim W = m$  mit jeweiligen Basen  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n) \subseteq V$  und  $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m) \subseteq W$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} : \text{Hom}(V, W) &\rightarrow M_{m \times n}(K) \\ T &\mapsto [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus. Das heisst, sie ist linear und bijektiv.

**Korollar 3.83.** Falls  $V$  und  $W$  endlich-dimensionale Vektorräume sind, dann gilt  $\dim \text{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$ .

**Korollar 3.85.** Der Vektorraum  $\text{End}(V) = \text{Hom}(V, V)$  ist ein Ring mit Verkettung als Multiplikation und  $\text{Id}_V$  als Einselement. Falls  $V$  endlich-dimensional ist (mit Dimension  $n$ ) und  $\mathcal{B} \subseteq V$  eine Basis ist, dann ist

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} : \text{End}(V) &\rightarrow M_{n \times n}(K) \\ T &\mapsto [T]_{\mathcal{B}} := [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

ein Ring-Isomorphismus.

### 3.6 Die Inverse, Elementarmatrizen und lineare Gleichungssysteme

**Korollar 3.86.** Sei  $A \in M_{m \times n}(K)$ . Dann ist  $U = \text{Lös}(A, 0) = \text{Ker}(A) = \text{Ker}(m_A)$  ein Untervektorraum von  $K^n$  von Dimension  $n - \text{Rang}(A)$ . Die Abbildung  $\Phi$  ist ein expliziter Isomorphismus von  $K^n$  nach  $U$ .

**Korollar 3.87.** Sei  $b \in K^m$  und  $A \in M_{m \times n}(K)$ . Es gilt

(1)  $\text{Lös}(A, b) \neq \emptyset$  genau dann, wenn  $b \in \text{SR}(A)$ .

(2) Falls  $\text{Lös}(A, b) \neq \emptyset$  und  $y \in \text{Lös}(A, b)$  ist, dann ist

$$\text{Lös}(A, b) = y + \text{Lös}(A, 0) := \{y + x \mid x \in \text{Lös}(A, 0)\}$$

**Proposition 3.88.** Sei  $A \in M_{m \times n}(K)$  und  $b \in K^m$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) Es gilt  $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A \mid b)$ .

(2) Die Gleichung  $Ax = b$  hat eine Lösung.

**Proposition 3.91.** Sei  $A \in M_{m \times n}(K)$  und  $b \in K^m$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) Es gilt  $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A \mid b) = n$ .

(2) Die Gleichung  $Ax = b$  hat eine eindeutige Lösung.

**Proposition 3.93 (Mutterlemma).** Sei  $A \in M_{n \times n}(K)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1)  $A$  ist invertierbar.

(2-4)  $m_A : K^n \rightarrow K^n$  ist ein Isomorphismus, also auch injektiv und surjektiv.

(5-7, 14)  $\text{Rang}(A) = \text{Spaltenrang}(A) = \text{Zeilenrang}(A) = \text{Rang}(A^T) = n$ .

(8-10, 15-17) Jeweils Die Spalten und Zeilen von  $A$  sind eine Basis von  $K^n$ , also auch erzeugend und linear unabhängig.

(11-12)  $Ax = b$  hat für alle  $b \in K^n$  eine eindeutige Lösung, insbesondere hat  $Ax = 0$  nur die triviale Lösung  $x = 0 \in K^n$ .

(14, 18)  $A^T$  und  $A^{-1}$  sind invertierbar.

(19-20)  $A$  ist jeweils zeilen- und spaltenäquivalent zu  $I_n$ . Das heisst, dass man  $A$  mittels Zeilen-/Spaltenoperationen zu  $I_n$  überführen kann.

### 3.6.1 Elementarmatrizen und Zeilen- und Spaltenoperationen

**Definition 3.97.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Mit  $E_{ij}$  der Nullmatrix, ausser im  $ij$ -ten Eintrag, welcher 1 ist, definieren wir die folgenden quadratischen Matrizen:

- Für  $1 \leq i \neq j \leq n$  und  $\alpha \in K$  definieren wir

$$Q_{i,j}(\alpha) := I_n + \alpha E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

- Für  $1 \leq i, j \leq n$  definieren wir die Permutationsmatrix  $P_{i,j} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ .

- Für  $1 \leq i \leq n$  und  $\alpha \in K^\times$  definieren wir  $S_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \alpha & \vdots \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$  wobei  $\alpha$  am  $ii$ -ten

Eintrag steht. Matrizen dieser Form heissen *Elementarmatrizen*.

**Lemma 3.99.** Sei  $A \in M_{n \times p}(K)$ . Es gilt

- Linksmultiplikation mit  $Q_{i,j}(\alpha)$  entspricht der Zeilenoperation  $L_i + \alpha L_j \rightarrow L_i$ :

$$A \xrightarrow{L_i + \alpha L_j \rightarrow L_i} Q_{i,j}(\alpha)A.$$

- Linksmultiplikation mit  $P_{i,j}$  entspricht der Zeilenoperation  $L_i \leftrightarrow L_j$ :

$$A \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} P_{i,j}A.$$

- Linksmultiplikation mit  $S_i(\alpha)$  entspricht der Zeilenoperation  $\alpha L_i \rightarrow L_i$ :

$$A \xrightarrow{\alpha L_i \rightarrow L_i} S_i(\alpha)A.$$

Ähnliches gilt für Spaltenoperationen, aber jeweils mit Rechtsmultiplikation.

**Lemma 3.100.** Seien  $\alpha \in K, \alpha^\times \in K^\times$ . Jede Elementarmatrix ist invertierbar und ihre Inverse ist auch elementar:

$$(Q_{i,j}(\alpha))^{-1} = Q_{i,j}(-\alpha)$$

$$(P_{i,j})^{-1} = P_{j,i}$$

$$(S_i(\alpha^\times))^{-1} = S_i\left(\frac{1}{\alpha^\times}\right)$$

**Satz 3.101.** Jede Matrix  $A \in \text{GL}_n(K)$  ist ein endliches Produkt von Elementarmatrizen.

**Korollar 3.103.** Seien  $A \in \text{GL}_n(K)$  und  $T_1, \dots, T_k$  Elementarmatrizen. Es gilt  $A^{-1} = T_k \dots T_1 T_1$ .

**Lemma 2.104.** Seien  $B, C, D \in M_{n \times n}(K)$ . Es gilt  $B(C \mid D) = (BC \mid BD)$ .

**Satz 3.105** (Gauss-Jordan). Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Man versucht die  $n \times 2n$  zusammengefügte Matrix  $(A \mid I_n)$  mittels Zeilenoperationen zur Form  $(I_n \mid B)$  zu bringen. Wenn dies möglich ist, dann ist  $A$  invertierbar und es gilt  $A^{-1} = B$ . Falls dies nicht möglich ist, dann ist  $A$  nicht invertierbar.

## 3.7 Fasern und Quotientenräume

### 3.7.1 Fasern

Für zwei Teilmengen  $A, B \subseteq V$  eines Vektorraums  $V$  definieren wir  $A+B := \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$ . Wir schreiben auch für  $a \in V$  und  $B \subseteq V$   $a+B := \{a\} + B$ .

**Proposition 3.110.** Sei  $T: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen  $V$  und  $W$ . Dann gilt:

(1) Falls  $w \in \text{Im}(T)$ , dann ist  $T^{-1}(w) = v + \text{Ker}(T)$ , wobei  $v$  ein beliebiger Vektor ist mit  $Tv = w$ .

(2) Falls  $w \notin \text{Im}(T)$ , dann gilt  $T^{-1}(w) = \emptyset$ .

Die Menge  $T^{-1}(w)$  heisst die Faser von  $w$  bezüglich  $T$ .

### 3.7.2 Quotientenraum

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$  und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Wir definieren eine Relation  $\sim_U$  auf  $V$  durch

$$v_1 \sim_U v_2 : \iff v_1 - v_2 \in U.$$

**Lemma 3.112.** Die Relation  $\sim_U$  ist eine Äquivalenzrelation.

**Lemma 3.113** (Äquivalenzklasse). Für jedes  $v \in V$  gilt  $[v]_{\sim_U} = v + U$ .

Im Fall  $U = \text{Ker}(T)$  sind die Äquivalenzklassen genau die nicht leeren Fasern. Die entsprechende Partition

$$V = \bigsqcup_{v \in V} [v]_{\sim_{\text{Ker}(T)}} = \bigsqcup_{v \in V} v + \text{Ker}(T)$$

von  $V$  heisst in diesem Fall eine *Faserung* von  $V$  durch  $T$ .

**Definition 3.116.** Mengen der Form  $A = v + U$  heissen *affine Unterräume* von  $V$ . Die *Dimension*  $\dim A$  von  $A$  ist definiert als  $\dim U$  und man sagt, dass  $A$  *parallel* zu  $U$  ist. Der Untervektorraum  $U$  nennen wir den Untervektorraum *assoziiert* zum affinen Unterraum  $A$ .

**Definition 3.117.** Mit der vorherigen Konstruktion, nennen wir die Menge

$$V/U := V / \sim_U = \{v + U \mid v \in V\}$$

den *Quotientenraum* oder den *Faktorraum* von  $V$  nach  $U$ .

Seien  $v_1 + U, v_2 + U \in V/U$ . Wir definieren die Addition und die Skalarmultiplikation auf  $V/U$ :

$$\begin{aligned} + : V/U \times V/U &\rightarrow V/U \\ ((v_1 + U), (v_2 + U)) &\mapsto v_1 + v_2 + U \\ \cdot : K \times V/U &\rightarrow V/U \\ (\alpha, v + U) &\mapsto \alpha v + U \end{aligned}$$

**Lemma 3.118.** Die zuvor definierte Addition ist wohl-definiert.

**Proposition 3.120.** Mit der obigen Addition und Skalarmultiplikation ist  $V/U$  ein Vektorraum über  $K$ .

**Proposition 3.122** (Kanonische Quotientenabbildung). Sei  $\pi_U : V \rightarrow V/U$  die Abbildung  $\pi_U(v) = v + U$ . Dann ist  $\pi_U$  linear,  $\text{Ker}(\pi_U) = U$  und  $\text{Im}(\pi_U) = V/U$ .

**Korollar 3.124.** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Für die Dimension des Quotientenraums  $V/U$  gilt  $\dim V/U = \dim V - \dim U$ .

**Proposition 3.125.** Sei  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Es gilt  $V/\text{Ker}(T) \cong \text{Im}(T)$ .

**Proposition 3.128.** Sei  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum und  $W$  ein Komplement von  $U$ . Das heisst, dass  $W \subseteq V$  ein Untervektorraum ist, so dass  $V = U \oplus W$ . Dann ist  $\pi_U|_W : W \rightarrow V/U$  ein Isomorphismus.

**Proposition 3.129** (Universelle Eigenschaft von  $V/U$ ). Sei  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen  $V$  und  $W$  und sei  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum mit  $U \subseteq \text{Ker}(T)$ . Dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung  $\tilde{T} : V/U \rightarrow W$ , so dass  $T = \tilde{T} \circ \pi_U$  gilt:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \pi_U \downarrow & \nearrow \tilde{T} & \\ V/U & & \end{array}$$

## 4 Determinanten

### 4.1 Magie in $K^2$ mit $2 \times 2$ -Matrizen

**Proposition 4.1.** Die Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(K)$  ist invertierbar genau dann, wenn  $ad - bc \neq 0$ . Falls sie invertierbar ist, dann gilt  $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ . Wir schreiben  $\det A = ad - bc$ .

**Proposition 4.2.** Sei  $E$  das Quadrat aufgespannt von  $e_1$  und  $e_2$  in  $\mathbb{R}^2$ . Das Bild  $m_A(E)$  von  $E$  unter  $A$  ist das Parallelogramm aufgespannt von  $m_A(e_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  und  $m_A(e_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ . Dann ist der Flächeninhalt von  $m_A(E)$  gegeben durch  $|ad - bc| = |\det A|$ .

- Die Abbildung  $m_A$  ist orientierungserhaltend, genau dann, wenn  $\det A > 0$ .
- Die Abbildung  $m_A$  ist orientierungsumkehrend, genau dann, wenn  $\det A < 0$ .
- In beiden Fällen skaliert  $m_A$  den Flächeninhalt mit dem Faktor  $|\det A|$ .

### 4.2 Volumen-Funktionen und die abstrakte Definition der Determinante

**Definition 4.5** (Axiome der Determinante). Es existiert eine eindeutige Funktion

$$\det : M_{n \times n}(K) \rightarrow K,$$

die *Determinante* heisst und die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(D1) Die Abbildung  $\det$  ist *multilinear* bezüglich Zeilen. Dies bedeutet:

- (a) Für alle  $v_1, \dots, v_n, w \in K_{\text{Zeil}}^n$  und alle  $1 \leq i \leq n$  gilt

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ v_i + w \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ v_i \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ w \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

- (b) Für alle  $a \in K$ , alle  $v_1, \dots, v_n \in K_{\text{Zeil}}^n$  und alle  $1 \leq i \leq n$  gilt

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ av_i \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = a \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ v_i \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

(D2) Die Abbildung  $\det$  ist *alternierend*. Das heisst, falls  $A$  zwei gleiche Zeilen hat, dann ist  $\det A = 0$ .

(D3) Die Abbildung  $\det$  ist *normiert*. Das heisst, dass  $\det I_n = \det \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = 1$ .

Man schreibt häufig  $|A| := \det A$ .

**Proposition 4.6.** *Es gilt:*

(D4)  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$

(D5) *Falls A eine Nullzeile hat, dann ist  $\det A = 0.$*

**Proposition 4.7** (Gauss und die Determinante). *Weiter Eigenschaften der Determinante:*

(D1b) *Sei  $\lambda \in K$  und  $A \xrightarrow{\lambda L_i \rightarrow L_i} B.$  Dann ist  $\det B = \lambda \det A.$  Mit Elementarmatrizen ausgedrückt heisst das, dass  $\det(S_i(\lambda)A) = \lambda \det A.$*

(D6) *Falls  $A \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} B,$  dann ist  $\det A = -\det B.$  Mit Elementarmatrizen ausgedrückt heisst das, dass  $\det(P_{i,j}A) = -\det A.$*

(D7) *Sei  $\lambda \in K$  und  $A \xrightarrow{L_i + \lambda L_j \rightarrow L_i} B,$  wobei  $i \neq j.$  Dann ist  $\det A = \det B.$  Mit Elementarmatrizen ausgedrückt heisst das, dass  $\det(Q_{i,j}(\lambda)A) = \det A.$*

**Proposition 4.9.** *Für eine obere Dreiecksmatrix mit Koeffizienten  $a_1, \dots, a_n$  auf der Hauptdiagonalen gilt  $\det A = a_1 \cdots a_n.$  Dieselbe Aussage gilt für untere Dreiecksmatrizen.*

**Korollar 4.10.** *Es gilt  $\det A \neq 0 \iff \text{Rang}(A) = n \iff A$  ist invertierbar.*

**Lemma 4.12.** *Für jedes  $\alpha \in K$  gilt*

(1)  $\det(S_i(\alpha)) = \alpha,$

(2)  $\det(P_{i,j}) = -1.$

(3)  $\det(Q_{i,j}(\alpha)) = 1.$

*Ausserdem gilt für jede Elementarmatrix T und jede beliebige Matrix B, dass  $\det(TB) = \det T \det B.$*

**Proposition 4.13.** *Seien  $A, B \in M_{n \times n}(K).$  Dann gilt  $\det(AB) = \det A \det B.$*

**Korollar 4.14.** *Seien  $\det$  und  $\widetilde{\det}$  zwei Funktionen, die (D1) - (D3) erfüllen. Dann ist  $\det = \widetilde{\det}.$*

*Bemerkung.* Da wir zeigen werden, dass  $\det A = \det(A^T),$  gelten alle obigen Aussagen über Zeilenoperationen analog für Spaltenoperationen.

### 4.3 Existenz der Determinante

#### 4.3.1 Permutationen

Sei  $S_n = \text{Abb}(\{1, \dots, n\})$  die Gruppe aller bijektiven Funktionen von  $\{1, \dots, n\}$  auf sich selbst mit der Verkettung als Verknüpfung. Die Elemente von  $S_n$  heissen *Permutationen.* Für  $\sigma \in S_n$  schreiben wir  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$  Per Definition der Multiplikation als Verkettung gilt für alle  $\sigma, \tau \in S_n:$   $\tau \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau\sigma(1) & \tau\sigma(2) & \dots & \tau\sigma(n) \end{pmatrix}.$  Die Permutation  $\text{Id} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$  ist das neutrale Element von  $S_n$  und die Inverse  $\sigma^{-1}$  die Umkehrfunktion von  $\sigma.$

**Definition 4.17** (Transposition). Sei  $n \in \mathbb{N}.$  Wir definieren das Element  $\sigma_{i,j} \in S_n$  als die Permutation, die  $i$  und  $j$  vertauscht, und sonst nichts ändert, und nennen sie eine *Transposition:*

$$\sigma_{i,j}(k) := \begin{cases} j, & \text{falls } k = i \\ i, & \text{falls } k = j \\ k, & \text{sonst} \end{cases} .$$

**Lemma 4.17.** *Sei  $\tau \in S_n$  mit  $\tau(1) = i$  und  $\tau(2) = j.$  Dann gilt  $\tau\sigma_{1,2}\tau^{-1} = \sigma_{i,j}.$*

**Übung 4.23.** (Zu zeigen:)  $S_n$  für  $n \geq 3$  ist nicht-abelsch.

### 4.3.2 Signum einer Permutation

**Definition 4.24.** Sei  $\sigma \in S_n$ . Ein *Fehlstand* von  $\sigma$  ist ein Paar  $i < j$  für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , so dass  $\sigma(i) > \sigma(j)$ .

**Definition 4.28** (Signum). Wir definieren das *Signum* einer Permutation  $\sigma \in S_n$  als

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1, & \text{falls } \sigma \text{ eine gerade Anzahl von Fehlständen hat} \\ -1, & \text{falls } \sigma \text{ eine ungerade Anzahl von Fehlständen hat} \end{cases} \\ = (-1)^k,$$

wobei  $k$  die Anzahl der Fehlstände von  $\sigma$  ist. Eine Permutation  $\sigma$  heisst *gerade*, falls  $\text{sign}(\sigma) = +1$  und *ungerade*, falls  $\text{sign}(\sigma) = -1$  ist.

**Lemma 4.30.** Für  $\sigma \in S_n$  gilt  $\text{sign}(\sigma) = \prod_{i < j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \frac{\prod_{i < j} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{i < j} (j - i)}$ .

**Lemma 4.31.** Für alle  $\sigma, \tau \in S_n$  gilt  $\text{sign}(\tau\sigma) = \text{sign}(\tau)\text{sign}(\sigma)$ . In anderen Worten ist

$$S_n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{1, -1\} \\ \sigma \mapsto \text{sign}(\sigma),$$

ein Homomorphismus von  $S_n$  nach  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{1, -1\}$ .

**Korollar 4.33.** Für alle  $\sigma \in S_n$  gilt  $\text{sign}(\sigma^{-1}) = \text{sign}(\sigma)$ .

**Korollar 4.34.** Für jedes  $i \neq j$  gilt  $\text{sign}(\sigma_{i,j}) = -1$ .

**Korollar 4.35.** Es gilt:

- (1) Die Abbildung  $\text{sign} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$  ist surjektiv, falls  $n \geq 2$ .
- (2) Die Menge  $A_n := \{\sigma \in S_n \mid \text{sign}(\sigma) = 1\} = \{\text{alle geraden Permutationen}\}$  ist eine Untergruppe von  $S_n$ .
- (3) Für jede Transposition  $\tau \in S_n$  gilt

$$A_n\tau := \{\sigma\tau \mid \sigma \in A_n\} = \{\sigma \in S_n \mid \text{sign}(\sigma) = -1\} = \{\text{alle ungeraden Permutationen}\} = S_n \setminus A_n.$$

- (4) Ausserdem gilt  $|A_n| = |A_n\tau| = \frac{1}{2}|S_n| = \frac{n!}{2}$ .

### 4.3.3 Existenz

**Satz 4.39** (Definition der Determinante). Wir definieren für  $A \in M_{n \times n}(K)$  die Determinante:

$$\det A := \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}.$$

Dann erfüllt  $\det$  die Bedingungen in (D1)-(D3) aus Satz 4.5.

**Satz 4.40.** Für jede Matrix  $A \in M_{n \times n}(K)$  gilt  $\det A^T = \det A$ .

**Übung 4.43.** Seien  $k \leq n \in \mathbb{N}$  und  $A \in K_{n \times n}(K)$  eine Blockmatrix der Form  $A = \begin{pmatrix} B_1 & * \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$  mit  $B_1 \in M_{k \times k}(K)$  und  $B_2 \in M_{(n-k) \times (n-k)}(K)$ . Dann gilt  $\det A = \det B_1 \cdot \det B_2$ . (Analog für  $A^T$ ).

### 4.3.4 (Determinante über einem Ring)

Sei  $R$  ein Ring (z.B.  $R = M_{l \times l}(K)$ ) und  $M_{n \times n}(R) = \{(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \mid a_{ij} \in R\}$ . Für  $A \in M_{n \times n}(R)$  definieren wir die Determinante genau gleich:  $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \in R$ .

## 4.4 Magie mit Minoren

Für eine Matrix  $A \in M_{n \times n}(K)$  sei  $A_{ij} \in M_{(n-1) \times (n-1)}(K)$  die Matrix, welche durch das Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte entstanden ist.

**Satz 4.44** (Laplace-Entwicklungssatz). *Sei  $A \in M_{n \times n}(K)$ . Für jedes  $1 \leq i \leq n$  kann man die Determinante von  $A$  bezüglich der  $i$ -ten Zeile folgendermassen entwickeln:*

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |A_{i2}| + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} |A_{in}| = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} |A_{ik}|.$$

Ähnlich kann man die Determinante bezüglich der  $j$ -ten Spalte entwickeln:

$$|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} |A_{kj}|.$$

**Definition 4.46.** Die *komplementäre Matrix* oder die *Adjunkte* einer Matrix  $A \in M_{n \times n}(K)$  ist  $\text{adj}(A) := ((-1)^{i+j} |A_{ji}|)_{1 \leq i, j \leq n}$ .

**Satz 4.49.** *Sei  $A \in M_{n \times n}(K)$ . Dann ist  $A \cdot \text{adj}(A) = \text{adj}(A) \cdot A = \det A \cdot I_n = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \det A \end{pmatrix}$ .*

**Korollar 4.50.** *Falls  $A \in \text{GL}_n(K)$ , dann gilt  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$ .*

**Korollar 4.51** (Cramersche Regel). *Sei  $A \in \text{GL}_n(K)$ . Wir betrachten das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  für  $b \in K^n = K_{\text{Spal}}^n$ . Sei  $A_i = (A^{(1)} \dots A^{(i-1)} b A^{(i+1)} \dots A^{(n)})$  die Matrix, welche  $b$  als  $i$ -te Spalte hat und die restliche Spalten stimmen mit den Spalten von  $A$  überein, für  $1 \leq i \leq n$ .*

*Dann berechnet sich die eindeutige Lösung  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  von  $Ax = b$  als  $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ .*

## 4.5 Verschiedene Wege in der Welt der Determinante

Weitere Möglichkeiten die Determinante zu definieren sind:

- Induktiv über die Laplace-Entwicklung
- Direkt mit der Gruppe  $S_n$ , ohne Charakterisierung durch (D1)-(D3)
- Direkt für Endomorphismen  $T \in \text{End}(V)$

## 4.6 Determinante und Rang

**Definition 4.52** (Minoren). Seien  $1 \leq k \leq n, m \in \mathbb{N}$ . Ein  $k$ -Minor von  $A \in M_{m \times n}(K)$  ist die Determinante einer  $k \times k$ -Matrix, die durch Streichen von  $(n-k)$ -Spalten und  $(m-k)$ -Zeilen von  $A$  entstanden ist. Eine solche Matrix heisst  $k \times k$ -Untermatrix von  $A$ .

**Satz 4.53.** *Sei  $A \in M_{m \times n}(K)$ . Dann gilt  $\text{Rang}(A) = \max\{k \mid \exists k\text{-Minor} \neq 0\}$ .*

## 4.7 Einige Korollare und die Determinante eines Endomorphismus

**Korollar 4.54.** *Für jedes  $A \in \text{GL}_n(K)$  gilt  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ .*

**Korollar 4.55.** *Seien  $A, B \in M_{n \times n}(K)$  ähnliche Matrizen. Dann gilt  $\det(A) = \det(B)$ .*

**Definition 4.56.** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$  mit  $\dim(V) = n < \infty$  und sei  $T \in \text{End}(V)$ . Wir definieren die Determinante von  $T$  als  $\det(T) := \det([T]_{\mathcal{B}})$ , wobei  $\mathcal{B}$  eine beliebige (geordnete) Basis von  $V$  ist.

**Lemma 4.57.**  $\det(T)$  ist wohl-definiert.

**Korollar 4.58.** Seien  $T \in \text{End}(V)$  wobei  $\dim V < \infty$  und  $\mathcal{B}$  eine geordnete Basis von  $V$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $T$  ist ein Isomorphismus.
- (2)  $T$  ist injektiv.
- (3)  $T$  ist surjektiv.
- (4)  $[T]_{\mathcal{B}}$  ist invertierbar.
- (5)  $[T]_{\mathcal{B}}$  erfüllt eine der äquivalenten Bedingungen in Proposition 3.93 (Mutterlemma).
- (6)  $\det(T) \neq 0$ .

**Definition 4.59.** Sei  $A \in M_{n \times n}(K)$ . Die *Spur* von  $A$  ist die Summe aller Einträge auf der Hauptdiagonalen. Das heisst,  $\text{spur}(A) := a_{11} + \dots + a_{nn}$ .

**Lemma 4.60.** Für  $A, B \in M_{n \times n}(K)$  gilt  $\text{spur}(AB) = \text{spur}(BA)$ .

**Korollar 4.61.** Falls  $A, B \in M_{n \times n}(K)$  ähnlich sind, dann gilt  $\text{spur}(A) = \text{spur}(B)$ .

## 4.8 Volumen und Orientierung

### Orientierung

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit  $\dim(V) = n < \infty$ . Sei  $X_V$  die Menge aller geordneten Basen auf  $V$ . Wir definieren folgendermassen eine Äquivalenzrelation auf  $X_V$ : Für  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  und  $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$  sei  $T \in \text{End}(V)$  die eindeutige Abbildung mit  $T(v_i) = w_i$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Wir sagen, dass  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  die gleiche Orientierung haben, und schreiben  $\mathcal{B} \sim \mathcal{C}$ , falls  $\det(T) > 0$ .

**Übung 4.62.** Es gilt  $\mathcal{B} \sim \mathcal{C} \iff \det([\text{Id}_V]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}) > 0 \iff \det([\text{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) > 0$ .

Die obige Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $X_V$  und  $X_V / \sim$  enthält genau zwei Äquivalenzklassen falls  $\dim(V) > 0$ . Eine Wahl einer dieser beiden Äquivalenzklassen auf  $V$  heisst die *Orientierung* auf  $V$ .

## 5 Eigenvektoren und Eigenwerte

### 5.1 Einführung

### 5.2 Definitionen

**Definition 5.2.1** (Diagonalisierbar). Ein Endomorphismus  $T \in \text{End}(V)$ , wobei  $\dim V = n < \infty$ , heisst *diagonalisierbar*, falls es eine Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  gibt, so dass

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix ist. Bemerke dass dies genau dann gilt, wenn  $Tv_i = \lambda_i v_i$  für  $i = 1, \dots, n$ .

**Definition 5.2.2** (Eigenvektor & Eigenwert). Ein Vektor  $v \in V$  heisst ein *Eigenvektor* von  $T$ , falls  $v \neq 0$  und es  $\lambda \in K$  gibt, so dass  $Tv = \lambda v$ . Der Skalar  $\lambda$  heisst der zum Eigenvektor  $v$  zugehörige *Eigenwert*.

**Lemma 5.2.7.** Ein Endomorphismus  $T \in \text{End}(V)$  ist diagonalisierbar genau dann, wenn eine Basis existiert, die nur aus Eigenvektoren von  $T$  besteht.

**Definition 5.2.8** (Definitionen für Matrizen). (1) Ein Skalar  $\lambda \in K$  heisst ein *Eigenwert* einer Matrix  $A \in M_{n \times n}(K)$ , falls  $\lambda$  ein Eigenwert von  $m_A : K^n \rightarrow K^n$  ist.

(2) Ein Vektor  $v \in K^n$  heisst ein *Eigenvektor* einer Matrix  $A \in M_{n \times n}(K)$ , falls  $v$  ein Eigenvektor von  $m_A : K^n \rightarrow K^n$  ist.

(3)  $A$  heisst *diagonalisierbar*, falls  $m_a$  diagonalisierbar ist.

### 5.2.1 Definition 5.2.8 explizit für Matrizen

**Definition 5.2.9.** Sei  $A \in M_{n \times n}(K)$ . Ein Skalar  $\lambda \in K$  heisst *Eigenwert* von  $A$ , falls es einen Vektor  $v \in K^n$  gibt, so dass  $v \neq 0$  und  $Av = \lambda v$ . Ein Vektor  $v \in K^n$  mit dieser Eigenschaft heisst ein *Eigenvektor* zum Eigenwert  $\lambda$ .

**Definition 5.2.13** (Diagonalisierbare Matrix). Eine Matrix  $A \in M_{n \times n}(K)$  heisst *diagonalisierbar*, falls  $P \in \text{GL}_n(K)$  existiert, so dass  $P^{-1}AP = D$ , wobei  $D$  eine Diagonalmatrix ist.

**Lemma 5.2.14.** Eine Matrix  $A$  ist diagonalisierbar genau dann, wenn es eine Basis  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  von  $K^n$  gibt, die nur Eigenvektoren von  $A$  enthält. In diesem Fall ist  $P = [\text{Id}_{K^n}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ , wobei  $\mathcal{E}$  die Standard-Basis von  $K^n$  ist und  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ , wobei  $\lambda_i$  der zugehörige Eigenwert zum Eigenvektor  $v_i$  ist.

### 5.2.2 Eigenvektoren mit verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig

**Proposition 5.2.16.** Sei  $T \in \text{End}(V)$  und seien  $v_1, \dots, v_n$  Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Dann ist  $\{v_1, \dots, v_n\}$  linear unabhängig.

**Korollar 5.2.17.** Falls  $\dim V = n$  ist und  $T \in \text{End}(V)$   $n$  paarweise verschiedene Eigenwerte hat, dann ist  $T$  diagonalisierbar.

## 5.3 Das charakteristische Polynom

**Definition 5.3.1** (Eigenraum). Sei  $T \in \text{End}(V)$  und  $\lambda$  ein Eigenwert von  $T$ . Der Eigenraum von  $T$  bezüglich  $\lambda$  ist  $\text{Eig}_T(\lambda) := \text{Ker}(T - \lambda \text{Id}_V) = \{v \in V \mid (T - \lambda \text{Id}_V)v = 0\} = \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$ . Falls  $A \in M_{n \times n}(K)$  ist, dann ist  $\text{Eig}_A(\lambda) := \text{Eig}_{m_A}(\lambda)$ .

**Lemma 5.3.3.** Es gilt

(1) Der Eigenraum  $\text{Eig}_T(\lambda)$  ist ein Untervektorraum.

(2) Es gilt  $\text{Eig}_T(\lambda) \neq \{0_V\}$  genau dann, wenn  $\lambda$  ein Eigenwert von  $T$  ist. Allgemeiner gilt  $\text{Eig}_T(\lambda) = \{0_V\} \sqcup \{\text{alle Eigenvektoren mit Eigenwert } \lambda\}$ .

(3) Falls  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ist, dann gilt  $\text{Eig}_T(\lambda_1) \cap \text{Eig}_T(\lambda_2) = \{0_V\}$ .

**Korollar 5.3.4.** Sei  $T \in \text{End}(V)$ . Für  $\lambda \in K$  gilt

$$\lambda \text{ ist ein Eigenwert von } T \iff \text{Ker}(T - \lambda \text{Id}_V) \neq \{0_V\}.$$

**Definition 5.3.5** (Charakteristisches Polynom). Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$  und  $x$  eine Variabel. Das *charakteristische Polynom* von  $A$  ist

$$p_a(x) := \det(A - xI_n) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} - x \end{pmatrix} \in K[x].$$

$A - xI_n$  ist als Matrix über dem Ring  $K[x]$  zu betrachten.

**Lemma 5.3.6.** Für  $A \in M_{n \times n}(K)$  gilt:

- (1)  $p_A$  ist ein Polynom von Grad  $n$ .
- (2) Falls  $p_A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  ist, dann ist  $a_n = (-1)^n$ ,  $a_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{spur}(A)$  und  $a_0 = \det A$ .
- (3)  $p_A = p_{A^T}$ .
- (4) Falls  $A$  eine obere beziehungsweise untere Dreiecksmatrix ist, dann ist  $p_A = \prod_{i=1}^n (a_i - x)$ .
- (5) Falls  $A$  eine obere beziehungsweise untere Blockdreiecksmatrix ist, mit  $B_1, \dots, B_k$  den Blockmatrizen, dann ist  $p_A = \prod_{i=1}^k p_{B_i}$ .
- (6) Falls  $A$  und  $B$  ähnlich sind, gilt  $p_A = p_B$ .

**Definition 5.3.8.** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $T \in \text{End}(V)$ . Das *charakteristische Polynom* von  $T$  ist durch  $p_T(x) := p_{[T]_{\mathcal{B}}}$  definiert, wobei  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$  ist.

### 5.3.1 Direkte Summen II

### 5.3.2 Diagonalisierbarkeit I

### 5.3.3 Geometrische Vielfachheit ist kleiner als algebraische Vielfachheit

**Definition 5.3.30.** Sei  $\lambda \in K$ . Die *geometrische Vielfachheit* von  $T$  in  $\lambda$  definieren wir durch  $m_g(\lambda) = m_g(T, \lambda) = \dim \text{Eig}_T(\lambda)$  und die *algebraische Vielfachheit* von  $T$  in  $\lambda$  definieren wir durch  $m_a(\lambda) = m_a(T, \lambda) = \mu(p_T \mid \lambda)$ .

**Lemma 5.3.31.** Sei  $T \in \text{End}(V)$ . Für jedes  $\lambda \in K$  gilt  $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$ .

### 5.3.4 Diagonalisierbarkeit II

**Satz 5.3.35.** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über  $K$  und  $T \in \text{End}(V)$ . Die folgenden Aussagen sind Äquivalent:

- (1)  $T$  ist diagonalisierbar.
- (2) Es existiert eine Basis von  $V$ , die nur Eigenvektoren enthält.
- (3) Das charakteristische Polynom  $p_T$  zerfällt in Linearfaktoren und die geometrische Vielfachheit ist gleich der algebraischen Vielfachheit. Das heißt, dass  $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$  für jedes  $i \in \{1, \dots, k\}$ .
- (4) Es gilt  $\sum_{i=1}^k \dim \text{Eig}_T(\lambda_i) = \dim V$ .
- (5) Es gilt  $V = \bigoplus_{i=1}^k \text{Eig}_T(\lambda_i)$ .