Elektrostatik $\vec\nabla\cdot\vec E=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho,\ \vec\nabla\times\vec E=0$

- Coulomb Kraft: $F_C=\frac{q_1q_2(\vec x_1-\vec x_2)}{4\pi\varepsilon_0\|\vec x_1-\vec x_2\|^3}$
- $\vec E(\vec x)=\frac{\vec F(\vec x)}{q}$, $\vec E(\vec x)=\int dy^3\,\frac{\rho(y)(\vec x-\vec y)}{4\pi\varepsilon_0\|\vec x-\vec y\|^3}$
- $E(\vec x)=-\vec\nabla\Phi(\vec x)$, $\Phi(\vec x)=\int d^3y\,\frac{\rho(y)}{4\pi\varepsilon_0\|x-y\|}$

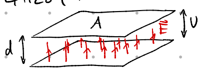
  $-\Delta\Phi=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec x)$ (Poisson Gleichung)
- Energie im E-Feld: $W=\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3x\,\vec E^2(\vec x)\geq 0$
- Homogen geladene Kugel: $\rho(r)=\begin{cases}Q/\frac{4}{3}\pi R^3, & r<R\\ 0, & r>0\end{cases}$

  $E(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases}r/R^3, & r<R\\ 1/r, & r>R\end{cases}$, $\Phi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases}-\frac12 r^2/R^3+\frac32/R, & r<R\\ 1/r, & r>R\end{cases}$

  $W=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0R}$
- Homogen geladene Kugeloberfläche:

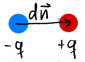
  $\rho(r)=\sigma\delta(r-R)$, $\sigma=\frac{Q}{4\pi R^2}$, $W=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0R}$

  $E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases}0, & r<R\\ 1/r^2, & r>R\end{cases}$, $\Phi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases}1/R & r<R\\ 1/r & r>R\end{cases}$
- Plattenkondensator:



  $E=Q/\varepsilon_0A$, $U=d\cdot E=\frac{dQ}{\varepsilon_0A}$

  $C:=\frac{Q}{U}=\frac{\varepsilon_0A}{d}$, $W=\frac{CU^2}{2}$
- Dipol: $\Phi(\vec x)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\|\vec x-\frac12 d\vec n\|}-\frac{1}{\|\vec x+\frac12 d\vec n\|}\right)$



  Dipolmoment: $\vec p:=qd\vec n\longrightarrow\Phi(\vec x)=\frac{\vec p\cdot\vec x}{4\pi\varepsilon_0\|x\|^3}$, $\rho(x)=-\vec p\vec\nabla\delta^3(\vec x)$

Randwertprobleme

- Allgemein: $Lf(x)=g(x)$, $f(x)=0\quad\forall x\in\partial V$

  $\to L_xG(x,y)=\delta(x-y)$, $G(x,y)=0\ \forall x\in\partial V\Rightarrow G(x,y)=\dots$

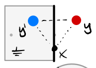
  $\Rightarrow f(x)=\int_V dy\,g(y)\,G(x,y)$
- Hier: $\Delta\Phi(x)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x)$, $\Phi(x)=\star\quad\forall x\in\partial V$

  $\Delta_xG(x,y)=-\delta^3(x-y)$, $G(x,y)=0\quad\forall x\in\partial V$

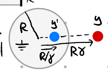
  $\Rightarrow G(x,y)=\frac{1}{4\pi\|x-y\|}+F(x,y)$, wähle $\Delta F=0$ s.d.
- Dirichlet-Randbedingung: $\Phi(x)=\omega(x)$, $x\in\partial V$

  $\Phi(x)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3y\,G(x,y)\rho(y)-\oint_{\partial V}d^2y\,\vec n\cdot\vec\nabla_yG(x,y)\,\omega(y)$
- Neumann-Randbedingung: $E_\perp=-\vec n\cdot\vec\nabla\Phi(x)=\nu(x)$, $x\in\partial V$

  $\Phi(x)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3y\,G(x,y)\rho(y)-\oint_{\partial V}d^2y\,G(x,y)\,\nu(y)+U_0$
- Halbraum: $G(x,y)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\|x-y\|}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\|x-y'\|}$



- Aussen einer Kugel: $G(x,y)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\|x-y\|}-\frac{1/\gamma}{4\pi\varepsilon_0\|x-y'\|}$



- Konforme trans.: $\vec x'=\frac{R^2}{\|x\|^2}\vec x$, $\Phi'(x)=\frac{R}{\|x\|}\Phi(x')$, $\rho'(x)=\frac{R^5}{\|x\|^5}\rho(x')$

- Multipolentwicklung: Sei für $\|x\|=r\geq R$: $\rho(x)=0$

  $r\gg R$: $\Phi(x)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\|x\|}+\frac{\vec x\cdot\vec p}{4\pi\varepsilon_0\|x\|^3}+\frac12\sum_{i,j=1}^{3}\frac{x_ix_jR_{ij}}{4\pi\varepsilon_0\|x\|^5}+\dots$

  $Q=\int d^3x\,\rho(x)$, $\vec p=\int d^3x\,\rho(x)\vec x$, $R_{ij}=\int d^3x\,\rho(x)(3x_ix_j-\delta_{ij}\vec x^2)$

Magnetostatik $\vec\nabla\cdot\vec B=0,\ \vec\nabla\times\vec B=\mu_0\vec j$

- B-Feld einer Stromschleife: $\vec B(x)=\mu_0I\oint_C\frac{d\vec y\times(\vec x-\vec y)}{4\pi\|x-y\|^3}$
- Lorentz: $\vec F=q(\vec v\times\vec B)$ • Biot-Savart: $\vec F=I(\vec\ell\times\vec B)$
- Kraft auf Stromschleife: $\vec F=I\oint_C d\vec x\times\vec B(x)$ | $d\vec F=I(d\vec x\times\vec B)$
- Drehmoment: $\vec M=I\oint_C\vec x\times(d\vec x\times\vec B(x))$
- Stromdichte $\vec j(x)$: $I_A=\int_A d^2x\,\vec n\cdot\vec j(x)$

  ↳ statische Kontinuitätsgleichung: $\vec\nabla\cdot\vec j=0$

  $\longrightarrow\ \vec B(x)=\mu_0\int d^3y\,\frac{\vec j(y)\times(\vec x-\vec y)}{4\pi\|x-y\|^3}$

  $\vec f(x)=\vec j(x)\times\vec B(x)$, $\vec F=\int d^3x\,\vec j(x)\times\vec B(x)$, $\vec M=\int d^3x\,\vec x\times(\vec j(x)\times\vec B(x))$
- Vektorpotential: $\vec B=\vec\nabla\times\vec A$, $\vec A(x)=\mu_0\int d^3y\,\frac{\vec j(x)}{4\pi\|x-y\|}$
- Coulomb-Eichung: $\vec\nabla\cdot\vec A=0$
- Poisson-Gleichung: $\Delta\vec A=-\mu_0\vec j$
- Feldenergie: $\Delta W=\frac12\int d^3x\,\vec A(x)\cdot\vec j(x)=\frac{1}{2\mu_0}\int d^3x\,\vec B^2\geq 0$
- Magnetisches Moment: Sei für $\|x\|\geq R$: $\vec j(x)=0$

  $\|x\|\gg R$: $\vec A(x)=\mu_0\int d^3y\,\vec j(y)\left[\frac{1}{4\pi\|x\|}+\frac{\vec x\cdot\vec y}{4\pi\|x\|^3}+\dots\right]=\mu_0\frac{\vec m\times\vec x}{4\pi\|x\|^3}+\dots$

  $\vec m:=\frac12\int d^3x\,\vec x\times\vec j(x)$

  $\vec F=\vec\nabla(\vec m\cdot\vec B)+\dots$, $\vec M=\vec m\times\vec B+\dots$, $W=-\vec m\cdot\vec B$

Elektro- & Magnetostatik in Materie

- Mittelung: $\Phi(x)=\bar\phi(x)=\int d^3y\,\phi(y)\varepsilon(x-y)$, $\int d^3x\,\varepsilon(x)=1$

  ↳ atomare Skala ≪ kompakter Träger von $\varepsilon(x)$ ≪ Messskala
- Dielektrikum: Dipol entsteht durch verschiebung von Kern & Elektronenhülle in Elektrischem Feld

- Paraelektrikum: Permanente Dipole werden durch Elektrisches Feld ausgerichtet.

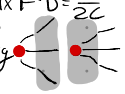
- Freie Ladung ρ_{frei} vs. Dipol Ladung ρ_{Dipol}

  ↳ $\rho_{ges}=\rho_{frei}+\rho_{Dipol}$ isotrop: $\gamma=\chi_e\in\mathbb R$, anisotrop: $\gamma\in\mathbb R^{n\times n}$
- Dipoldichte $\vec P\approx\varepsilon_0\gamma\vec E$, $\rho_{Dipol}=-\vec\nabla\cdot\vec P$

  $\Phi(x)=\int d^3y\left[\rho_{frei}(y)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\|x-y\|}+\vec P(y)\vec\nabla_y\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\|x-y\|}\right]$, $\vec\nabla\cdot\vec E=\frac{\rho_{ges}}{\varepsilon_0}$
- Dielektrische Verschiebung: $\vec D=\varepsilon_0\vec E+\vec P$, $\vec\nabla\cdot\vec D=\rho_{frei}$
- El. Materialkonstanten: $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$, $\varepsilon_r=1+\chi_e$

  ↳ $\vec D=\varepsilon\vec E$ ↳ $\varepsilon_r>1$: $\vec E$ verschwächt
- Bsp: Plattenkondensator

  $D=\frac{Q}{A}$, $U=dE=\frac{dD}{\varepsilon}$, $C=\frac{Q}{U}=\varepsilon_rC_0$, $W=\int d^3x\,\vec F\cdot\vec D=\frac{Q^2}{2C}$
- Bei Grenzfläche: $D_\perp$ stetig, $E_\parallel$ stetig

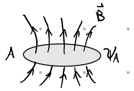


- Magnetisierung: $\vec M=\frac{\gamma}{\mu_0}\vec B\overset{\text{Dielektrikum}}{=}\frac{\chi_m}{\mu_0}\vec B$, $\vec j_m=\vec\nabla\times\vec M$
- Magnetfeld $\vec H$: $\vec B=\mu_0(\vec H+\vec M)=\mu\vec H$, $\mu=\mu_0\mu_r$, $\mu_r=1+\chi_m$
- Diamagnetismus: $\chi_m<0$, $|\chi_m|$ klein
- Paramagnetismus: $\chi_m>0$, temperaturabh. → $\vec B$ verstärkt

$$\boxed{\begin{array}{llll}\vec\nabla\cdot\vec D=\rho_{frei} & \vec\nabla\times E=0 & \vec\nabla\cdot\vec B=0 & \vec\nabla\times\vec H=\vec j_{frei}\\ \vec D=\varepsilon_0\vec E+\vec P=\varepsilon\vec E & & \vec H=\frac{\vec B}{\mu_0}-\vec M=\frac{1}{\mu}\vec B & \\ \text{Vakuum: } \vec D=\varepsilon_0\vec E, & \vec H=\frac{1}{\mu_0}\vec B & & \end{array}}$$

Maxwell-Gleichungen

- Lorentz-kraft: $\vec F=q(\vec E+\vec v\times\vec B)$
- Magnetischer Fluss: $\Psi_A=\int_A d^2x\,\vec n\cdot\vec B$



- Faradysche Induktion: $\Delta V_{\partial A}=\oint_{\partial A}d\vec x\cdot(\vec E+\dot{\vec x}\times\vec B)=-\frac{d}{dt}\int_A d^2x\,\vec n\cdot\vec B=-\dot\Psi_A$

$$\boxed{\begin{array}{ll}\vec\nabla\cdot\vec E=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho & \vec\nabla\times\vec E+\partial_t\vec B=0\\ \vec\nabla\cdot\vec B=0 & \vec\nabla\times\vec B-\mu_0\varepsilon_0\partial_t\vec E=\mu_0\vec j\end{array}}$$

$\oint_{\partial V}d^2x\,\vec n\cdot\vec B=0$ $\quad\frac{d}{dt}\int_A d^2x\,\vec n\cdot\vec B=-\oint_{\partial A}d\vec x\cdot(\vec E+\dot{\vec x}\times\vec B)$

$\oint_{\partial V}d^2x\,\vec n\cdot\vec E=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3x\,\rho$ $\quad\frac{d}{dt}\int_A d^2x\,\vec n\cdot\vec E=\oint_{\partial A}d\vec x\cdot\left(\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\vec B-\dot{\vec x}\times\vec E\right)-\frac{1}{\varepsilon_0}\int_A d^2x\,\vec n\cdot(\vec j-\dot{\vec x}\rho)$

- Kontinuitätsgleichung: $\vec\nabla\cdot\vec j+\partial_t\rho=0$
- Kraftdichte: $\vec f(x)=\rho(x)\vec E(x)+\vec j(x)\times\vec B(x)$, $\vec F_V=\int_V d^3x\,\vec f(x)$
- Drehmoment: $\vec M_V=\int_V d^3x\,\vec x\times\vec f$
- Potentiale: $\vec B=\vec\nabla\times\vec A$, $\vec E=-\vec\nabla\Phi-\partial_t\vec A$
- D'Alembert: $\Box:=\Delta-\frac{1}{c^2}\partial_t^2$
- Inhomogene Gleichungen: $-\Box\Phi-\partial_t\left[\frac{1}{c^2}\partial_t\Phi+\vec\nabla\cdot\vec A\right]=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

  $-\Box\vec A+\vec\nabla\left[\frac{1}{c^2}\partial_t\Phi+\vec\nabla\cdot\vec A\right]=\mu_0\vec j$
- Eichtransformationen: $\vec A'=\vec A+\vec\nabla\Lambda$, $\Phi'=\Phi-\partial_t\Lambda$
- Coulomb-Eichung: $\vec\nabla\cdot\vec A=0\longrightarrow\Delta\Phi=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$
- Lorenz-Eichung: $\vec\nabla\cdot\vec A+\frac{1}{c^2}\partial_t\Phi=0\longrightarrow-\Box\Phi=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$, $-\Box A=\mu_0\vec j$

  ↳ lässt sich immer erreichen. Sei $X:=\vec\nabla\cdot\vec A+\partial_t\Phi/c^2$: $X'=X+\Box\Lambda$

Erhaltungsgrössen & Symmetrien

- Ladungserhaltung: $\dot Q_V=\int_V d^3x\,\partial_t\rho=-\int_V d^3x\,\vec\nabla\cdot\vec j=-\int_{\partial V}d^2x\,\vec n\cdot\vec j=:-J_{\partial V}$
- Energiedichte: $w(x)=\frac{\varepsilon_0}{2}\vec E^2+\frac{1}{2\mu_0}\vec B^2$
- Poyntingvektor: $\vec S=\frac{1}{\mu_0}\vec E\times\vec B$ ("Energiestromdichte")
- Satz von Poynting: $\partial_tw+\vec\nabla\cdot\vec S=-\vec E\cdot\vec j$, $\dot W_V+S_{\partial V}+P_{mech,V}=0$

  $W_V:=\int_V d^3x\,w(x)$, $S_{\partial V}:=\oint_{\partial V}d^2x\,\vec n\cdot\vec S$, $P_{mech,V}:\int_V d^3x\,\vec j\cdot\vec E$

- Impulsdichte: $\vec\pi:=\varepsilon_0\vec E\times\vec B=\varepsilon_0\mu_0\vec S$
- Impulsstromdichte (Spannungstensor): $T_{jk}=\varepsilon_0\left(E_jE_k-\frac12\delta_{jk}\vec E^2\right)+\frac{1}{\mu_0}\left(B_jB_k-\frac12\delta_{jk}\vec B^2\right)$

$\dot{\vec\pi}+\vec f=\vec\nabla T$, $\partial_t\pi_k+f_k=\sum_{j=1}^{3}\nabla_jT_{jk}$, $\partial_t\vec P_V+\vec F_V=\oint_{\partial V}d^2x\,\vec n\cdot T$, $\vec P_V=\int_V d^3x\,\vec\pi$

- Drehimpuls $\vec L=\int d^3x\,\vec x\times\vec\pi$ • Energieschwerpunkt $\vec G=\int d^3x\,w\vec x$
- Energie W und Drehimpuls $\vec L$ sind erhalten
- Energieschwerpunkt G bewegt sich linear: $\vec G-c^2t\vec P$ ist erhalten

Ladung	Symmetrie	Drehimpuls	Rotation
Energie	Zeittranslation	Schwerpunktbewegung	Bezugssystemtransf.
Impuls	Ortstranslation	elektrische Ladung	Eichtransformation

- Galileitrasformation (ohne Rotation): $x'=x-vt$, $t'=t$

  $\vec\nabla'=\vec\nabla$ $\quad\frac{d}{dt}f'(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)+\vec v\cdot\vec\nabla f(x,t)$

  $\vec E'(x',t)=\vec E(x,t)+\vec v\times\vec B(x,t)$ $\quad\vec B'(x',t)=\vec B(x,t)$

  $\rho'(x',t)=\rho(x,t)$ $\quad\vec j'(x',t)=\vec j(x,t)-\vec v\rho(x,t)$

Homogene Mxwl-Gl. $\vec\nabla'\cdot\vec B'=\vec\nabla\cdot\vec B=0$, $\vec\nabla'\times\vec E'+\frac{\partial\vec B'}{\partial t}=\dots=0$ ✓

Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial\rho'}{\partial t'}+\vec\nabla'\vec j'=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec\nabla\vec j=0$ ✓

Inhomogene Mxwl Gl. $\vec\nabla'\vec E'=\frac{\rho}{\varepsilon_0}-\vec v(\vec\nabla\times\vec B)\neq\frac{\rho'}{\varepsilon_0}$ ✗

$\vec\nabla'\times\vec B'-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec E'}{\partial t}=\mu_0\vec j'+\underbrace{\varepsilon_0\mu_0}_{1/c^2}\left(\frac{\vec v\rho}{\varepsilon_0}+\vec v\times(\vec\nabla\times E)-(\vec v\cdot\vec\nabla)\vec E-(\vec v\cdot\vec\nabla)(\vec v\times\vec B)\right)\neq\mu_0\vec j'$

- EM-Dualität: $\vec\nabla\cdot\vec E=0$, $\vec\nabla\times\vec E+\partial_t\vec B=0$; $\vec\nabla\cdot\vec B=0$, $\vec\nabla\times\vec B-\frac{1}{c^2}\partial_t\vec E=0$ $\quad\begin{pmatrix}\vec E'\\ c\vec B'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec E\\ c\vec B\end{pmatrix}$

Spezielle Relativitätstheorie

- Für $\rho=0$, $\vec j=0$ gilt: $\Box\vec B=0$, $\Box\vec E=0$ (inhom Gl)
- Im Vierer-formalismus: $\Box:=\sum_{\mu=0}^{3}\eta^{\mu\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^2$, $\eta=\begin{pmatrix}-1&&&\\&+1&&\\&&+1&\\&&&+1\end{pmatrix}$
- Lorentz-Transformationen erhalten die Wellengleichung $\Box'=\Box$

$L_+^\uparrow=\{\Lambda\in GL(4,\mathbb R)\,|\,\Lambda\eta\Lambda^T=\eta,\ \Lambda^{00}>0,\ \det\Lambda=+1\}$, $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta=\frac{v}{c}$

$x=x^\mu e_\mu$, $e'_\mu=\Lambda^\nu{}_\mu e_\nu$, $x'^\mu=(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu$, $\partial^\mu=(\partial^t/c,\vec\nabla)$

- Boost:

  $\Lambda(\vec v)=\begin{pmatrix}\gamma & \gamma\vec v^T/c\\ \gamma\vec v/c & \mathbb 1+\gamma^2\vec v\vec v^T/c^2(1+\gamma)\end{pmatrix}\overset{\vec v=\tilde e_x}{=}\begin{pmatrix}\gamma&\beta\gamma&0&0\\ \beta\gamma&\gamma&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{pmatrix}$

  $\vec E'=\gamma\vec E+\gamma\vec v\times\vec B-\frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}(\vec E\cdot\vec v)\vec v$

  $\vec B'=\gamma\vec B-\frac{\gamma}{c^2}\vec v\times\vec E-\frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}(\vec B\cdot\vec v)\vec v$

  $\rho'=\gamma\rho-\frac{\gamma}{c^2}\vec v\cdot\vec j$ $\quad\vec j'=\vec j-\gamma\rho\vec v+\frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}(\vec j\cdot\vec v)\vec v$
- ED im Vierer-formalismus:

  $(\vec A\times\vec B)_k=\varepsilon_{ijk}A_iB_j$, $\vec A\times\vec B=A^\times\vec B$, $(A^\times)_{ij}:=-\varepsilon_{ijk}A_k=\begin{pmatrix}0&-A_z&+A_y\\+A_z&0&-A_x\\-A_y&+A_x&0\end{pmatrix}$

  $\partial_jB^\times_{jk}-\frac{1}{c^2}\partial_tE_k=\mu_0j_k$ $\quad\frac1c\partial_jE_j=\mu_0c\rho$

Feldstärketensor: $F_{\mu\nu}:=\begin{pmatrix}0&\vec E^T/c\\-\vec E/c&B^\times\end{pmatrix}$, $F_{ij}=B^\times_{ij}=-\varepsilon_{ijk}B_k$, $F_{0k}=c^{-1}E_k=-F_{k0}$, $F_{00}=0$

Viererstromdichte: $J_\mu=\begin{pmatrix}-c\rho\\ \vec j\end{pmatrix}$, $J_k=j_k$, $J_0=-c\rho$

Dualer Feldstärketensor: $\tilde F_{\mu\nu}:=\begin{pmatrix}0&-\vec B^T\\ \vec B&c^{-1}E^\times\end{pmatrix}$, $\tilde F_{ij}=c^{-1}E^\times_{ij}=c^{-1}\varepsilon_{ijk}E_k$, $\tilde F_{0k}=-B_k=-\tilde F_{k0}$, $\tilde F_{00}=0$

$\tilde F_{\mu\nu}=\frac12\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$, $\tilde{\tilde F}_{\mu\nu}=-F_{\mu\nu}$

Homogene Mxwl-Gl: $\partial_\mu F_{\nu\rho}+\partial_\nu F_{\rho\mu}+\partial_\rho F_{\mu\nu}=0\Leftrightarrow\partial^\mu\tilde F_{\mu\nu}=0$

Inhomogene Mxwl-Gl: $\eta^{\mu\nu}\partial_\mu F_{\nu\rho}=\mu_0J_\rho$

- Energie-Impulstensor is erhalten: $T_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} -w & c^{-1}\vec{S}^T \\ c^{-1}\vec{S} & T_{ij} \end{pmatrix}$

$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} F_{\mu\rho} F_\nu{}^\rho + \frac{1}{4\mu_0}\eta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$, $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, $T_\mu{}^\mu = 0$

Kontinuitätsgleichung: $\partial^\mu T_{\mu\nu} = -J_\rho F_\nu{}^\rho$

- ~~Vier~~-Potential: $A_\mu = (-c^{-1}\Phi, \vec{A})$, $F_{\mu\nu} = -\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu$

Eichtransformation: $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, Lorentzeichung: $\partial^\mu A_\mu = 0$

Inhomogene Mxwl-Gl. $\mu_0 J_\nu = \partial^\mu F_{\mu\nu} = -\Box A_\nu + \partial_\nu(\partial^\rho A_\rho)$

↳ Lorenz Eichung: $\Box A_\mu = -\mu_0 J_\mu$

- Kinematik: $\Delta x = L_0/\gamma$, $\Delta t = \gamma \Delta\tau$, "u+v": $\frac{v+u}{1+\frac{uv}{c^2}}$

$x = x^\mu e_\mu$ $\quad x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x}(t)\end{pmatrix}$ $\quad \sqrt{x\cdot x} = c\tau$, $\sqrt{-x\cdot x} = L_0$

$u = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx}{dt}$ $\quad u^\mu = \gamma\begin{pmatrix} c \\ \vec{v}\end{pmatrix}$ $\quad \sqrt{u\cdot u} = c$ $\quad \frac{dt}{d\tau} = \gamma$

$p = mu$ $\quad p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \gamma\vec{p}\end{pmatrix}$ $\quad \sqrt{p\cdot p} = mc$ $\quad E^2 = m^2c^4 + \gamma^2 c^2 \vec{p}^2$

Lorentzkraft: $\dot{\vec{p}} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$, $c\dot{p}^0 = q\vec{E}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\dot{\vec{p}}$

Freie Wellen $\Box\vec{E} = 0$, $\Box\vec{B} = 0$, $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

- Monochromatische Welle: $\Psi(x,t) = \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t)$

löst $\Box\Psi = 0$, $\vec{k} = \|k\|\vec{n}$, $\omega^2 = c^2\vec{k}^2 \Leftrightarrow \omega = \pm\|k\|c$

Wellenlänge $\lambda = 2\pi/\|k\| = 2\pi c/\omega = c/\nu$

↳ $\psi = \mathrm{Re}[Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}] = \mathrm{Re}(A)\cos(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t) - \mathrm{Im}(A)\sin(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)$

- Fourier: $F(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\omega t}\tilde{F}(\omega)$, $\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-i\omega t} F(t)$

$\tilde{\tilde{F}}(t) = F(t)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-i\omega t} = 2\pi\delta(\omega)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\omega t} = \delta(t)$

→ $\tilde{\Psi} = 2\pi\delta(\omega - \|k\|c)A(k) + 2\pi\delta(\omega + \|k\|c)A^*(-k)$

$$\left[\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right]\psi = 0 \iff \left[-\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right]\tilde{\psi} = 0$$

- Feldgleichungen: $\vec{n}\cdot\vec{E} = \vec{n}\cdot\vec{B} = 0$, $\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}$

- Polarisierung Monochromatischer Wellen:

$\vec{E} = \mathrm{Re}[(a_1\vec{n}_1 + a_2\vec{n}_2)\exp(i\vec{k}\vec{x} - i\|k\|ct)]$ $\quad a_n \in \mathbb{C}$

$\vec{B} = \frac{1}{c}\mathrm{Re}[(a_1\vec{n}_2 - a_2\vec{n}_1)\exp(i\vec{k}\vec{x} - i\|k\|ct)]$

Rotation/Translation/Skalierung → $(a_1, a_2) = (1, i\alpha)$, $-1 \le \alpha \le 1$

- Linear: $\alpha = 0$, $\vec{E} \sim \vec{n}_1$, $\vec{B} \sim \vec{n}_2$

$\vec{E} = E_0\vec{n}_1\cos(k\vec{n}_3\cdot\vec{x} - \omega t)$, $\vec{B} = \frac{E_0}{c}\vec{n}_2\cos(k\vec{n}_3\cdot\vec{x} - \omega t)$

$\varepsilon_0\vec{E}^2 = \varepsilon_0 E_0^2\cos^2 = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2$, $\quad w = \varepsilon_0 E_0^2\cos^2(k\vec{n}_3\cdot\vec{x} - \omega t)$

$\vec{\Pi} = \frac{w}{c}\vec{n}_3$, $\vec{S} = cw\vec{n}_3$, $\quad T = -w\vec{n}_3\vec{n}_3^T = -c\vec{n}_3\vec{\Pi}^T$

gemittelt: $\overline{w} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$

- Zirkular: $\alpha = \pm 1$

$\vec{E} = E_0[\vec{n}_1\cos(k\vec{n}_3\cdot\vec{x} - \omega t) - \vec{n}_2\sin(k\vec{n}_3\cdot\vec{x} - \omega t)]$

$\vec{B} = \frac{E_0}{c}[\vec{n}_1\sin(k\vec{n}_3\cdot\vec{x} - \omega t) + \vec{n}_2\cos(k\vec{n}_3\cdot\vec{x} - \omega t)]$

$\varepsilon_0\vec{E}^2 = \varepsilon_0 E_0^2$, $\frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2 = \varepsilon_0 E_0^2$, $\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{c}\vec{n}_3$

$w = \varepsilon_0 E_0^2$ $\quad \vec{\Pi} = \frac{\varepsilon_0}{c}E_0^2\vec{n}_3 = \frac{w}{c}\vec{n}_3$

$\vec{S} = \varepsilon_0 c E_0^2\vec{n}_3 = wc\vec{n}_3$, $\quad T = -\varepsilon_0 E_0^2\vec{n}_3\vec{n}_3^T = c\vec{n}_3\vec{\Pi}^T$

- Elliptisch: $\alpha \neq 0, \pm 1$

- Gausssches Wellenpaket $A(k) \sim \exp(-\frac{1}{2}(k-k_0)^2/\Delta k^2)$

$\Psi(x,t) = 2\,\mathrm{Re}\int\frac{dk}{2\pi}A(k)e^{i(\vec{n}\cdot\vec{x} - ct)k}$

$\Psi(x,t) \sim \mathrm{Re}[\exp(-\frac{1}{2}\Delta k^2(\vec{n}\cdot\vec{x} - ct)^2)e^{ik_0(\vec{n}\cdot\vec{x} - ct)}$

- Phasen- & Gruppengeschw. $v_0 = \frac{\omega}{\|k\|}$, $v_g = \frac{d\omega}{d\|k\|}$

- Kugelwellen: $\Psi(x,t) = \frac{1}{r}\psi(r,t) \sim \frac{1}{r}e^{ik\vec{n}\cdot\vec{x} - i\omega t}$

$w \sim \frac{1}{r^2}$, $\quad \vec{S} \sim \frac{1}{r^2}\vec{n}$, $\quad T \sim \frac{1}{r^2}\vec{n}\vec{n}^T$

- AWP: Zwangsbedingung: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$\rho = \vec{J} = 0$ Zeitentwicklung: $\partial_t\vec{E} = c^2\vec{\nabla}\times\vec{B}$, $\partial_t\vec{B} = -\vec{\nabla}\times\vec{E}$

↳ Erhaltung der Feldenergie $\quad W = \int d^3x\left[\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\right]$

- Fourier: Allgemeine Lösung von $\Box E = \Box B = 0$

$\vec{E}(x,t) = \int\frac{dk^3}{(2\pi)^3}\left[\vec{\alpha}(k)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t} + \vec{\alpha}(k)^* e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}\right]$

$\vec{B}(x,t) = \int\frac{dk^3}{(2\pi)^3}\left[\vec{\beta}(k)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t} + \vec{\beta}(k)^* e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}\right]$

$\alpha(k) = \frac{1}{2}\vec{E}_0(k) - \frac{c^2}{2\omega}\vec{k}\times\vec{B}_0(k)$

$\beta(k) = \frac{1}{2}\vec{B}_0(k) + \frac{1}{2\omega}\vec{k}\times\vec{E}_0(k)$

- AWP mit Quellen: $\Box\Psi = -\rho$

$\Psi(x,t) = \int d^3y\, ds\, G(x-y, t-s)\rho(y,s) + \Psi_{hom}(x,t)$

$\Box G = -\delta^3(x)\delta(t) \longrightarrow G_{ret}(x,t) = \frac{c}{4\pi r}\delta(r - ct)$

Fourier $\longrightarrow \tilde{G}(k,\omega) = \frac{1}{k^2 - \omega^2/c^2}$

- Lorenz-Eichung: $\Box\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$, $\Box\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$

$\Phi(x,t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3y\, ds\, G_{ret}(x-y, t-s)\rho(y,s) = \int dy^3\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\|x-y\|}\rho(y, t - \frac{\|x-y\|}{c})$

$\vec{A}(x,t) = \mu_0\int d^3y\, ds\, G_{ret}(x-y, t-s)\vec{J}(y,s) = \int dy^3\frac{\mu_0}{4\pi\|x-y\|}\vec{J}(y, t - \frac{\|x-y\|}{c})$

- Monochromatische oszillierende Ströme: $F(x,t) = \mathrm{Re}[F_0(x)e^{-i\omega t}]$

$\Phi_0(x) = \int d^3y\frac{\rho_0(y)}{4\pi\varepsilon_0\|x-y\|}e^{i\|x-y\|k} = -i\frac{c^2}{\omega}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_0$

$\vec{A}_0(x) = \int dy^3\frac{\mu_0 \vec{J}_0(y)}{4\pi\|x-y\|}e^{i\|x-y\|k}$

$\vec{B}_0 = \vec{\nabla}\times\vec{A}_0$ $\quad \vec{E}_0 = i\omega\vec{A}_0 + i\frac{c^2}{\omega}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_0)$

- Grosser Abstand, Strahlungszone $\|x\| = r \gg d > \|y\|$, $r \gg \lambda \sim y$

$\|x - y\| = r - \vec{n}\cdot\vec{y} - \frac{(\vec{n}\cdot\vec{y})^2}{2r} + \frac{\vec{y}^2}{2r} + \mathcal{O}(1/r^2)$

$\vec{A}(x) = \underbrace{\int d^3y\frac{\mu_0\vec{J}(y)}{4\pi r}e^{ikr}e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{y}}}_{\vec{A}_{as}} + \mathcal{O}(e^{ikr}/r^2)$

$\vec{B} = ik\vec{n}\times\vec{A} + \mathcal{O}(e^{ikr}/r^2)$ $\quad \vec{E} = ikc(A - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{A})) + \mathcal{O}(e^{ikr}/r^2)$

$\langle\frac{1}{4}\varepsilon_0\vec{E}^2\rangle = \langle\frac{1}{4}\mu_0^{-1}\vec{B}^2\rangle$, $\langle w\rangle = \frac{k^2}{2\mu_0}(\|A\|^2 - |\vec{n}\cdot\vec{A}|^2) + \mathcal{O}(1/r^3)$

$\langle\vec{S}\rangle = c\vec{n}\langle w\rangle + \mathcal{O}(1/r^3)$, $\langle T\rangle = -\vec{n}\vec{n}^T\langle w\rangle + \mathcal{O}(1/r^3)$

$\frac{d^2P}{d^2\Omega} := r^2\vec{n}\cdot\vec{S} = \frac{ck^2r^2}{2\mu_0}(\|A\|^2 - |\vec{n}\cdot\vec{A}|^2) + \mathcal{O}(1/r)$

$P = \oint d^2\Omega\, r^2\vec{n}\cdot\vec{S} = \frac{ck^2r^2}{2\mu_0}\oint d^2\Omega(\|A_{as}\|^2 - |\vec{n}\cdot\vec{A}_{as}|^2)$

- Multipol-Entwicklung: $\vec{A}_{as}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi r}e^{ikr}[-ikc\vec{P} - ik\vec{M}\times\vec{n} - \frac{1}{6}k^2cR\vec{n} + \cdots]$

$\vec{P} = \int d^3x\,\rho(x)\vec{x}$, $\quad R = \int d^3x\,(3\vec{x}\vec{x}^T - \vec{x}^2)\rho$, $\quad \vec{M} = \frac{1}{2}\int d^3x\,\vec{x}\times\vec{J}$

- Nahzone: $\vec{A} \approx \int d^3y\frac{\mu_0\vec{J}(y)}{4\pi\|x-y\|}$

- Lineare Antenne: $\vec{J}(x) = I\vec{e}_z\sin(kd - k|z|)\delta(x)\delta(y)$, $|z| \le d$

→ $\vec{A}_{as} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\vec{e}_z e^{ikr}\frac{2}{k}\frac{\cos(kd\cos\vartheta) - \cos(kd)}{\sin^2(\vartheta)}$

- Beschleunigte Ladung: $\rho(x,t) = q\delta^3(x - y(t))$, $\vec{J}(x,t) = q\dot{\vec{y}}(t)\delta(x - y(t))$

$\Phi(x,t) = \int dt'\frac{cq}{4\pi\varepsilon_0\|x - y(t')\|}\delta(\|x - y(s)\| - c(t - t')) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 rk}$

$\vec{A}(x,t) = \int dt'\frac{cq\mu_0\dot{\vec{y}}}{4\pi\|x - y(t')\|}\delta(\|x - y(s)\| - c(t - t')) = \frac{\mu_0 q\vec{v}}{4\pi rk}$

$r(x,t) = \|x - y(s)\|$, $\vec{n}(x,t) = \frac{\vec{x} - \vec{y}(s)}{r}$, $\vec{v}(x,t) = \dot{\vec{y}}(s)$, $k(x,t) = 1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{c}$

s gegeben durch $\|x - y(s)\| = c(t - s)$, $\partial_t s = \frac{1}{k}$, $\vec{\nabla}s = \frac{\vec{n}}{ck}$

- Strahlung eines ursprünglich ruhenden Punktteilchen

$\vec{S} = \frac{q^2\mu_0}{16\pi^2 c r^2}\left[\vec{n}(\vec{a}^2 - (\vec{n}\cdot\vec{a})^2) + \frac{c^2}{r}(\vec{a} - \vec{n}\cdot\vec{a})\right]$, $\vec{P} = \frac{\mu_0 q^2\vec{a}^2}{6\pi c}$

- relativistisch: $v^\mu = (c, \vec{0})$, $a^\mu = (0, \vec{a}) \rightarrow r = \frac{v\cdot x}{c}$

$B_k = -\frac{\mu_0 q}{4\pi c^2 r^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho k}v^\mu x^\nu a^\rho$, $E_k = \frac{q x_k}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - \frac{\mu_0 q}{4\pi r^3}(a_k r^2 - x_k(x\cdot a))$

$T_{\mu\nu} = \frac{\mu_0 c^2 q^2}{16\pi^2(v\cdot x)^6}(c^2(a\cdot x)^2 - a^2(v\cdot x)^2)x_\mu x_\nu$

Wellen in & mit Materie

$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$, $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$, $\quad \vec{\nabla}\times\vec{H} - \partial_t\vec{D} = \vec{J}$, $\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0$

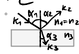
$w = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} + \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$, $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$, $\vec{\Pi} = \vec{D}\times\vec{B}$, $T_{ij} = D_iE_j + B_iH_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B})$

- Linear, isotrope Medien: $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}$, $\quad \vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_r\mu_0\vec{H}$
- Ausbreitungsgeschw. im Medium: $u = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{n}$, $n := \sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$
- Monochrom. Welle: $\vec{E} = \mathrm{Re}[\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t}]$, $\vec{B} = \mathrm{Re}[\vec{B}_0 e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t}]$

$\|k\| = \frac{\omega}{u} = \frac{\omega n}{c}$, $\quad \vec{k}\cdot\vec{E}_0 = \vec{k}\cdot\vec{B}_0 = \vec{E}_0\vec{B}_0 = 0$, $\quad \vec{B}_0 = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}_0$

$\vec{w} = \frac{\|E_0\|^2}{2\mu u^2} = \frac{n^2}{2\mu_0 c^2}\|E_0\|^2$, $\quad \vec{S} = \frac{1}{\mu u}\frac{\vec{k}}{\|k\|}\|E_0\|^2 = \frac{c}{n}\frac{\vec{k}}{\|k\|}w$

- Dispersion: $D(\omega) = \varepsilon_0\varepsilon_r(\omega)E(\omega)$, $\|k\| = \frac{\omega}{c}n(\omega) \iff \omega = \omega(\|k\|)$
- An Grenzflächen gilt: $\vec{E}_\parallel, \vec{H}_\parallel, \vec{B}_\perp, \vec{D}_\perp$ stetig., $\omega' = \omega$, $\vec{k}'_\parallel = \vec{k}_\parallel \rightsquigarrow e^{i\vec{k}_\parallel\cdot\vec{x}_\parallel - i\omega t}$
- Snell's law: $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_3} = \frac{n_3}{n_1}$, $\frac{k_3}{k_1} = \frac{n_3}{n_1}$, $k_1 = k_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$



- Transversal Elektrische Mode: $\vec{E} \parallel$ Grenzfläche $\quad E_1 + E_2 = E_3$

$R = \frac{w_2}{w_1} = \frac{\|E_2\|^2}{\|E_1\|^2} = \left(\frac{\cos\alpha_1 - n\cos\alpha_3}{\cos\alpha_1 + n\cos\alpha_3}\right)^2$ $\quad T = \frac{w_3}{w_1} = \frac{n\cos\alpha_3}{\cos\alpha_1}\frac{\|E_3\|^2}{\|E_1\|^2} = \frac{4n\cos\alpha_1\cos\alpha_3}{(\cos\alpha_1 + n\cos\alpha_3)^2}$

- Transversal Magnetische Mode: $\vec{B} \parallel$ Grenzfläche $\quad B_1 + B_2 = B_3$

$R = \frac{\|B_2\|^2}{\|B_1\|^2} = \left(\frac{n\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3}{n\cos\alpha_1 + \cos\alpha_3}\right)^2$ $\quad T = \frac{w_3}{w_1} = \frac{\cos\alpha_3}{n\cos\alpha_1}\frac{\|B_3\|^2}{\|B_1\|^2} = \frac{4n\cos\alpha_1\cos\alpha_3}{(n\cos\alpha_1 + \cos\alpha_3)^2}$

- Brewster-Winkel $\alpha_B = \tan n$: Relexion $\perp$ Transmission → TM: $R = 0$ vollständige polarisation
- Totalreflexion: $\sin\alpha_1 > n$, Eindringtiefe: $1/|k_{3z}| = 1/-i\sqrt{\sin^2\alpha_3 - 1}$, → phasenversch.
- Streuquerschnitt: $\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} := \frac{d^2P_{ein}/d^2\Omega}{d^2P_{aus}/d^2A}$, $\sigma := \oint d^2\Omega\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}$
- Rayleigh: Streuung an Inhomogenitäten im Medium.
- Welle im Leiter: $\vec{J} = \sigma\cdot\vec{E}$, $\partial_t\rho = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho \Rightarrow \rho \rightsquigarrow 0$
- Telegraphen-Gl. $\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{E} - \mu_0\sigma\partial_t\vec{E} = 0$, → $\Psi = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}$, $\omega = \omega_r + i\omega_i$

→ reel/imaginäres k, ω: zeitlich oder räumlich abklingende Welle.

Stromkreise $U = RI$, $Z = \frac{V}{I}$, $P = UI$

- Impedanz: $Z_R = R$, $Z_L = -\frac{i}{\omega L}$, $Z_C = i\omega C$
- Spule: $L = \frac{\mu N^2 A}{l}$, $W = \frac{1}{2}LI^2$, $V = L\dot{I}$
- Kondensator: $C = \varepsilon\frac{A}{d}$, $\dot{Q} = I$, $U = \frac{Q}{C}$
- Schwingkreis: $L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0$, $Q(t) = a_1e^{b_1t} + a_2e^{b_2t}$

$b_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$, $a_1 = \frac{I_0 - Q_0b_2}{b_1 - b_2}$, $a_2 = \frac{I_0 - Q_0b_1}{b_2 - b_1}$

$b_{1,2} \in \mathbb{R}$ → Starke-, $b_{1,2} \in \mathbb{C}$ → schwache, $b_1 = b_2$ → kritische Dämpf.

Wechselstrom: Resonanzfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Math n' Stuff

Gauss: $\int_{\partial V} d^2x\,\vec{n}\cdot\vec{F}(x) = \int_V d^3x\,\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(x)$

Stokes: $\int_{\partial A} d\vec{x}\cdot\vec{F}(x) = \int_A d^2x\,\vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F}(x))$

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$, $\quad \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{B} - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

$A\cdot(B\times C) = B\cdot(C\times A) = C\cdot(A\times B)$, $A\times(B\times C) = (A\cdot C)B - (A\cdot B)C$

$(A\times B)\cdot(C\times D) = (A\cdot C)(B\cdot D) - (B\cdot C)(A\cdot D)$

$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$, $Y_{1\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta e^{\pm i\varphi}$

$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\vartheta - 1)$, $Y_{2\pm1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\vartheta\cos\vartheta e^{\pm i\varphi}$

$Y_{2\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32}}\sin^2\vartheta\, e^{\pm 2i\varphi}$

$x = r\sin\vartheta\cos\varphi$ $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$y = r\sin\vartheta\sin\varphi$ $\quad \vartheta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) = \arccos\left(\frac{z}{\|x\|}\right)$

$z = r\cos\vartheta$ $\quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

$dV = r^2\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$, $d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$, $\quad \delta(r)\frac{\delta(\vartheta)}{r}\frac{\delta(\varphi)}{r\sin\vartheta}$

$\nabla = (\partial_r, \frac{1}{r}\partial_\vartheta, \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi)$

$\nabla\cdot A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$

$\nabla\times A = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(A_\varphi\sin\vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right)\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right)\vec{e}_\varphi$

$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$

$x = r\cos\vartheta$ $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad dV = r\,dr\,d\vartheta\,dz$

$y = r\sin\vartheta$ $\quad \vartheta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ $\quad \delta(r)\frac{\delta(\varphi)}{r}\delta(z)$

$z = z$ $\quad z = z$ $\quad \nabla = (\partial_r, \frac{1}{r}\partial_\varphi, \partial_z)$

$\nabla = (\partial_r, 1/r\,\partial_\vartheta, \partial_z)$, $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

$\nabla\times A = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi})\right)\vec{e}_z$

$\nabla\cdot A = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-bx^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + c$, $\int fg' = fg - \int f'g$

$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}^3}dx = -\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} + c$, $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}^3}dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + c$