Zusammenfassung Analysis I und II

Vorlesung von Prof. Giovanni Felder
Vorlesungsskript 2018/2019, (2019/2020)
Manfred Einsiedler, Andreas Wieser, (Peter Jossen)

Manuel Antoinette

9. Juni 2021

Diese Zusammenfassung listet hauptsächlich alle Definitionen, Lemmas, Korollare, Theoreme, Sätze, Propositionen und ein paar wichtige Beispiele und Übungen auf, wie sie im Skript aufgeschrieben sind (zum Teil etwas paraphrasiert). Sie soll dazu dienen einen Überblick über alle Definitionen und deren Folgerungen zu geben. Die Gliederung und Nummerierung der Theoreme ist dabei aus dem Skript übernommen.

Die im Herbstsemester 2020 in Analysis I behandelten Themen werden aus dem Vorlesungsskript 2019/2020 von *Peter Jossen* **[J]** zusammengefasst. Die Themen der Analysis II werden aus dem Vorlesungsskript 2018/2019 **[F]**, das begleitend zur Vorlesung des FS 2021 von Giovanni Felder verwendet wird, zusammengefasst.

Inhaltsverzeichnis

3 [J] Die reellen Zahlen

3.1 Die Axiome der reellen Zahlen

3.1.1 Angeordnete Körper

Definition 3.1 (Angeordneter Körper)**.** Sei K ein Körper, und sei $\leq$ eine Ordnungsrelation auf der Menge K. Wir nennen $(K, \leq)$, oder kurz einen **angeordneten Körper** falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. Linearität der Ordnung: Für alle $x, y \in K$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$.
2. Kompatibilität von Ordnung und Addition: Für alle $x, y, z \in K$ gilt $x \leq y \Rightarrow x + y \leq y + z$.
3. Kompatibilität von Ordnung und Multiplikation: Für alle $x, y \in K$ gilt $(x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \Rightarrow x \cdot y \geq 0$.

Lemma 3.4 (Folgerungen)**.** *(a) (Trichotomie) Es gilt entweder* $x < yoderx = yoderx > y$.

(b) Falls $x < yundy \leq z$ *ist, dann gilt auch* $x < z$.

(c) (Addition von Ungleichungen) Gilt $x \leq y$ *und* $z \leq w$*, dann gilt auch* $x + z \leq y + w$.

(d) Es gilt $x \leq y$ *genau dann, wenn* $0 \leq y - x$ *gilt.*

(e) Es gilt $x \leq 0 \iff 0 \leq -x$.

(f) Es gilt $x^2 \geq 0$ *und* $x^2 > 0$*, falls* $x \neq 0$.

(g) Es gilt $0 < 1$.

(h) Falls $0 \leq x$ *und* $y \leq z$*, dann gilt* $xy \leq xz$.

(i) Falls $x \leq 0$ *und* $y \leq z$*, dann gilt* $xy \geq xz$.

(j) Aus $0 < x \leq y$ *folgt* $0 < y^{-1} \leq x^{-1}$.

(k) Aus $0 \leq x \leq y$ *und* $0 \leq z \leq w$ *folgt* $0 \leq xz \leq yw$.

(l) Aus $x + y \leq x + z$ *folgt* $y \leq z$.

(m) Aus $xy \leq xz$ *und* $x > 0$ *folgt* $y \leq z$.

Definition 3.12 (Absolutbetrag, Signum)**.** Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Der **Absolutbetrag** auf K ist die Funktion $|\cdot| : K \to K$ die durch

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

für alle $x \in K$ definiert ist. Das **Signum** ist die Funktion sgn: $K \to \{-1, 0, 1\}$ die durch

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

für alle $x \in K$ definiert ist.

Lemma 3.13 (Folgerungen)**.** *(a) Es gilt* $x = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|$*, sowie* $|-x| = |x|$ *und* $\operatorname{sgn}(-x) = -\operatorname{sgn}(x)$.

(b) Es gilt $|x| \geq 0$*, und* $|x| = 0$ *genau dann wenn* $x = 0$.

(c) *(Multiplikativität) Es gilt* $\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y)$ *und* $|xy| = |x||y|$.

(d) *Ist* $x \neq 0$*, so gilt* $\left|x^{-1}\right| = |x|^{-1}$.

(e) $|x| \leq y$ *ist äquivalent zu* $-y \leq x \leq y$.

(f) $|x| < y$ *ist äquivalent zu* $-y < x < y$.

(g) *(Dreiecksungleichung) Es gilt* $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(h) *(umgekehrte Dreiecksungleichung) Es gilt* $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

3.1.2 Das Vollständigkeitsaxiom

Definition 3.15 (Vollständigkeit)**.** Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Wir sagen $(K, \leq)$ sei **vollständig** oder ein **vollständig angeordneter Körper** falls die Aussage (V) wahr ist.

(V) Seien X, Y nicht-leere Teilmengen von K derart, dass für alle $x \in X$ und $y \in Y$ die Ungleichung $x \leq y$ gilt, dann gibt es ein $c \in K$, das zwischen X und Y liegt, in dem Sinn, als dass für alle $x \in X$ und $y \in Y$ die Ungleichung $x \leq c \leq y$ gilt.

Die Aussage (V) bezeichnen wir als **Vollständigkeitsaxiom**.

Übung 3.18 (Wurzelfunktion)**.** Wir nennen **Wurzelfunktion** die Funktion $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die jedem $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die durch $c^2 = a$ und $c \geq 0$ eindeutig bestimmte reelle Zahl c zuordnet. Wir nennen $c = \sqrt{a}$ **Wurzel** von a. *Folgerungen:* 1. Die Wurzelfunktion ist wachsend: für $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x < y$ gilt die Ungleichung $\sqrt{x} < \sqrt{y}$. 2. Die Wurzelfunktion ist bijektiv. 3. Für alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.

3.1.3 Intervalle

Definition 3.20. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist das **abgeschlossene Intervall** $[a, b]$ und das **offene Intervall** (a, b) durch

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \text{ und } (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

definiert. Die **halboffenen Intervalle** $[a, b)$ und $(a, b]$ sind durch

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \text{ und } (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

definiert. Wenn das Intervall nicht leer ist, dann wird a der **linke Endpunkt**, b der **rechte Endpunkt**, und $b - a$ die **Länge des Intervalls** genannt. Wir definieren die **unbeschränkten abgeschlossenen** und **unbeschränkten offenen Intervalle** sowie $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$:

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \text{ und } (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \text{ und } (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

Definition 3.23 (Umgebung)**.** Sei $x \in \mathbb{R}$. Eine Menge, die ein offenes Intervall enthält, in dem x liegt, wird auch eine **Umgebung** oder **Nachbarschaft** von x genannt. Für ein $\delta > 0$ wird das offene Intervall $(x - \delta, x + \delta)$ die δ**-Umgebung** von x genannt.

Definition 3.25 (Offene/abgeschlossene Mengen)**.** Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ heisst **offen** in $\mathbb{R}$, wenn für jedes $x \in U$ ein offenes Intervall I mit $x \in I$ und $I \subset U$ existiert. Eine Teilmenge $F \subseteq \mathbb{R}$ heisst **abgeschlossen** in $\mathbb{R}$, wenn ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus F$ offen ist.

3.2 Komplexe Zahlen

3.2.1 Definition der komplexen Zahlen

5 [F] Folgen und Grenzwerte

5.1 Konvergenz von Folgen

5.2 Reelle Folgen

5.2.1 Monotone Folgen

5.2.2 Limes superior und Limes inferior

Definition 5.37 (Limes superior)**.** Für eine beschränkte reelle Folge $(a_n)_n$ ist der **Limes superior** definiert durch

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right).$$

Definition 5.38 (Limes inferior)**.** Für eine beschränkte, reelle Folge $(a_n)_n$ ist der **Limes inferior** definiert durch

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right).$$

Satz 5.40 (Eigenschaften des Limes superior)**.** *Für eine reelle, beschränkte Folge $(a_n)_n$ erfüllt der Limes superior $\limsup_{n\to\infty} a_n$ die folgenden Eigenschaften:*

- *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele Folgenglieder a_n mit $a_n > \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon$.*
- *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele Folgenglieder a_n mit $a_n \geq \limsup_{n\to\infty} a_n - \varepsilon$.*

Der Limes Inferior hat zu dem Limes Superior analoge Eigenschaften.

Korollar 5.43 (Charakterisierung der Konvergenz)**.** *Für eine reelle, beschränkte Folge $(a_n)_n$ gilt $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ genau dann wenn $(a_n)_n$ konvergent ist.*

6 [F] Reihen, Funktionenfolgen und Potenzreihen

6.1 Reihen

6.2 Absolute Konvergenz

6.3 Konvergenz von Funktionenfolgen

6.3.1 Punktweise Konvergenz

Definition 6.40 (Funktionenfolgen und punktweise Konvergenz)**.** Eine reellwertige (oder komplexwertige) **Funktionenfolge** auf einer Menge X ist eine Folge $(f_n)_n$ von Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$ (oder $f_n : X \to \mathbb{C}$). Wir sagen, dass eine Funktionenfolge $(f_n)_n$ **punktweise** gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ (oder $f : X \to \mathbb{C}$) **konvergiert**, falls $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$ und alle $x \in X$. Wir bezeichnen die Funktion f als den **punktweisen Grenzwert** (oder auch **Grenzfunktion** oder **Limes**) der Funktionenfolge $(f_n)_n$. In Prädikatenlogik:

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

6.3.2 Gleichmässige Konvergenz

Definition 6.45 (Gleichmässige Konvergenz)**.** Sei $(f_n)_n$ eine komplexwertige Funktionenfolge auf einer Menge X und f eine weitere komplexwertige Funktion auf X. Wir sagen f_n **strebt gleichmässig** gegen f für $n \to \infty$, oder dass f der **gleichmässige Grenzwert** der Funktionenfolge $(f_n)_n$ ist, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ und alle $x \in X$ die Abschätzung $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ gilt. In Prädikatenlogik:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : (n \geq N \implies (\forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon))$$

Satz 6.48 (Gleichmässige Konvergenz und Stetigkeit)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f_n : D \to \mathbb{C}$ eine Funktionenfolge stetiger Funktionen. Falls $(f_n)_n$ gleichmässig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert, dann ist f ebenso stetig.*

Satz 6.49 (Gleichmässige Konvergenz und Riemann-Integrierbarkeit)**.** *Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge Riemann-integrierbarer Funktionen. Falls $(f_n)_n$ gleichmässig gegen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert, dann ist f Riemann-integrierbar und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}x = \int_a^b f \mathrm{d}x.$$

6.4 Potenzreihen

Definition 6.54 (Potenzreihe)**.** Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $a_n \in \mathbb{C}$. Dann ist der formale Ausdruck $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine **Potenzreihe** in der Variable z.

6.4.1 Konvergenzradius

Definition 6.55 (Konvergenzradius)**.** Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Wir definieren den **Konvergenzradius** durch $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, wobei wir $\frac{1}{+\infty} = 0$ setzen und hier (aber auch nur hier) die Vereinbarung $\frac{1}{0} = +\infty$ treffen.

Satz 6.56 (Über den Konvergenzradius)**.** *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe und R ihr Konvergenzradius. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ absolut und divergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$. Weiters konvergiert die Funktionenfolge $\sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ gleichmässig gegen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf einer Kreisscheibe der Form $B_S(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < S\}$ für jedes $S \in (0, R)$. Insbesondere definiert die Potenzreihe die stetige Abbildung $z \in B_R(0) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}$.*

6.4.2 Addition und Multiplikation

Proposition 6.62 (Summen und Produkte)**.** *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradius R_a respektive R_b. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \min\{R_a, R_b\}$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) z^n.$$

Insbesondere ist der Konvergenzradius der Potenzreihen auf der rechten Seite mindestens $\min\{R_a, R_b\}$.

6.4.3 Stetigkeit bei Randpunkten

Satz 6.65 (Abelscher Grenzwertsatz)**.** *Sei $\bar{f} : x \in (-R, R] \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}$ mit $R \in (0, \infty)$. Wir nehmen an, dass $\bar{f}(R)$ konvergiert. Dann ist $\bar{f}$ stetig. Das heisst*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \bar{f}(R) = \lim_{x\nearrow R} \bar{f}(X) = \lim_{x\nearrow R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Analoges gilt, falls $\bar{f}(-R)$ konvergiert.