1 Newtonsche Mechanik

Freies Teilchen in einem Inertialsystem Ein *Freies Teilchen* ist keinen physikalischen Kräften ausgesetzt. In eienem *Inertialsystem* bewegt es sich geradlinig: $\vec{x}(t)=\vec{x}_0+\vec{v}t$, $\ddot{\vec{x}}=0$.

Koordinatentransformationen zw. Inertialsystemen

$$t'=\lambda t+a \qquad \vec{x}'=R\vec{x}+\vec{v}t+\vec{b}$$

wobei $\lambda\pm 1$, $a\in\mathbb{R}$, $R\in \mathrm{O}(3)$ und $\vec{v},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$.

Mehrteilchensysteme (Beispiele)

$$\text{Gravitationskraft:}\quad \vec{F}_k=-G\sum_{i\neq k}m_k m_i\frac{\vec{x}_k-\vec{x}_i}{\|\vec{x}_k-\vec{x}_i\|^3}$$

$$\text{Coulombkraft:}\quad \vec{F}_k=\sum_{i\neq k}\frac{q_k q_i}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{x}_k-\vec{x}_i}{\|\vec{x}_k-\vec{x}_i\|^3}$$

Potential

$$\vec{F}_k=-\frac{\partial}{\partial\vec{x}_k}V(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n,t),\qquad V=\sum_{j<k}V_{jk}\left(\|\vec{x}_j-\vec{x}_k\|\right)$$

Globale Grössen

$$M=\sum_{k=1}^n m_k \qquad \vec{L}=\sum_{k=1}^n \vec{x}_k\times\vec{p}_k$$

$$\vec{X}=\sum_{k=1}^n\frac{m_k}{M}\vec{x}_k \qquad \vec{M}=\sum_{k=1}^n\vec{x}_k\times\vec{F}_k=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}$$

$$\vec{P}=\sum_{k=1}^n\vec{p}_k=M\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{X} \qquad T=\sum_{k=1}^n\frac{1}{2}m_k\dot{\vec{x}}_k^2$$

$$\vec{F}=\sum_{k=1}^n\vec{F}_k=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{P} \qquad P=\sum_{k=1}^n\dot{\vec{x}}_k\cdot\vec{F}_k$$

Schwerpunktsystem

$$\vec{L}=\vec{X}\times\vec{P}+\vec{L}_S \qquad \vec{L}_S=\textstyle\sum_{k=1}^n\left(\vec{x}_k-\vec{X}\right)\times\left(\vec{p}_k-\frac{m_k}{M}\vec{P}\right)$$

$$\vec{M}=\vec{X}\times\vec{F}+\vec{M}_S \qquad \vec{M}_S=\textstyle\sum_{k=1}^n\left(\vec{x}_k-\vec{X}\right)\times\left(\vec{F}_k-\frac{m_k}{M}\vec{F}\right)$$

$$T=\frac{\vec{P}^2}{2M}+T_S \qquad T_S=\textstyle\sum_{k=1}^n\frac{m_k}{2}\left(\dot{\vec{x}}_k-\dot{\vec{X}}\right)^2$$

$$P=\frac{\vec{P}\cdot\vec{F}}{M}+P_S \qquad P_S=\textstyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{m_k}\left(\vec{p}_k-\frac{m_k}{M}\vec{P}\right)\cdot\left(\vec{F}_k-\frac{m_k}{M}\vec{F}\right)$$

Beschleunigte Bezugssysteme Bezeichne $\vec{y}$ die Koordinaten eines beschleunigten Bezugssystems, welches mit dem Koordinaten $\vec{x}$ eines Inertialsystems via $\vec{x}(t)=R(t)\vec{y}(t)+\vec{b}$ in Beziehung steht. Dann gilt:

$$m\ddot{\vec{y}}=R^\top\vec{F}_x-2mR^\top\dot{R}\dot{\vec{y}}-mR^\top\ddot{R}\vec{y}-mR\top\ddot{\vec{b}}$$

- Coriolis Kraft: $\vec{F}_C=-2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{y}}$
- Zentrifugalkraft: $\vec{F}_Z=-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{y})=-\int\mathrm{d}\vec{y}\rho(\vec{y})\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{y})$
- Führungskraft: $\vec{F}_F=-m\vec{a}$

2 Zweikörper-Probleme

$$\ddot{\vec{x}}_1=-\frac{1}{m_1}\frac{\partial}{\partial\vec{x}_1}V(\|\vec{x}_1-\vec{x}_2\|)\qquad \ddot{\vec{x}}_2=+\frac{1}{m_2}\frac{\partial}{\partial\vec{x}_1}V(\|\vec{x}_1-\vec{x}_2\|)$$

Relativkoordinaten

$$\mu:=\frac{m_1m_2}{m_2+m_1},\qquad \vec{x}:=\|\vec{x}_1-\vec{x}_2\|,\qquad r:=\|\vec{x}\|$$

$$\mu\ddot{\vec{x}}=-\frac{\partial}{\partial\vec{x}}V(r),\qquad \vec{L}=\mu\vec{x}\times\dot{\vec{x}},\qquad T=\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{x}}^2$$

Erhaltungsgrössen $\vec{x}=r\vec{e}_r,\qquad \dot{\vec{x}}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

$$L=\mu r^2\dot{\varphi}=\text{const.},\qquad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}=\frac{L}{2\mu}=\text{const.}$$

$$T=\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{x}}^2=\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{L^2}{2\mu r^2},\quad E=T+V(r)=\text{const.}$$

Integration Reduktion auf Einkörper-System

$$\dot{\varphi}=\frac{L}{\mu r^2},\qquad \dot{r}=\pm\sqrt{2\mu^{-1}(E-U(r))},\qquad U(r)=\frac{L^2}{2\mu r^2}+V(r)$$

$$\varphi(r)-\varphi(r_0)=\pm\int_{r_0}^r\frac{L\,\mathrm{d}r'}{r'^2\sqrt{2\mu(E-U(r'))}}$$

$$t(r)-t(r_0)=\pm\int_{r_0}^r\frac{\mathrm{d}r'}{\sqrt{2\mu^{-1}(E-U(r'))}}$$

$$E-U(r)=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2\geq 0$$

- Umkehrpunkt falls $\dot{r}=0$ und $\mu\ddot{r}=-U(r)\neq 0$. Stabil falls $\mu\ddot{r}<0$, Instabil falls $\mu\ddot{r}>0$.

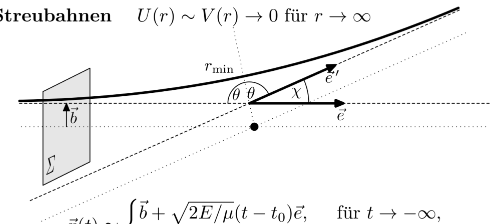
Gebundene Bahnen $r(t)$ periodisch

- $r_{\min/\max}(E)$ nullstellen von $E-U(r)$:

$$T_r(E)=2\int_{r_{\min(E)}}^{r_{\max(E)}}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\mu^{-1}(E-U(r))}}$$

$$\Delta\varphi=2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{L\,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2\mu(E-U(r))}}$$

Streubahnen $U(r)\sim V(r)\to 0$ für $r\to\infty$



$$\vec{x}(t)\simeq\begin{cases}\vec{b}+\sqrt{2E/\mu}(t-t_0)\vec{e}, & \text{für } t\to-\infty,\\ \vec{b}'+\sqrt{2E/\mu}(t-t_0)\vec{e}', & \text{für } t\to+\infty\end{cases}$$

- Es gilt $v=\sqrt{2E/\mu}$, da $r\to\infty\Rightarrow E\to T=\frac{1}{2}\mu v^2$.
- $\vec{b}$ heisst Stossparameter.

$$\vec{L}=\mu\vec{x}\times\dot{\vec{x}}\to\sqrt{2\mu E}\vec{b}\times\vec{e},\qquad L=b\sqrt{2\mu E}$$

$$\chi=\pi-2\int_{r_{\min}}^\infty\frac{L\,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2\mu(E-U(r))}}=\pi-2\int_{r_{\min}}^\infty\frac{b\,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{1-V(r)/E-b^2/r^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}^2\Omega}(\chi)=\left|\frac{b}{\sin\chi}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\chi}\right|=\frac{b}{\sin\chi}\left|\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}b}\right|^{-1}$$

$$\sigma_{\text{tot}}=\int_{S^2\setminus\varepsilon}\mathrm{d}^2\Omega\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}^2\Omega}=\lim_{\varepsilon\to0+}2\pi\int_\varepsilon^\pi\mathrm{d}\chi\sin\chi\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}^2\Omega}(\chi)$$

Kepler $V(r)=-\frac{Gm_1m_2}{r},\qquad \mu\ddot{\vec{x}}=-GM\mu\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$

$$e:=\frac{E}{\mu},\qquad l:=\frac{L}{\mu},\qquad g:=GM$$

$$U(r)=\frac{L^2}{2\mu r^2}-\frac{GM\mu}{r}=\mu\left(\frac{l^2}{2r^2}-\frac{g}{r}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}=\pm\frac{L\,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2\mu(E-U(r))}}=\pm\frac{l}{r\sqrt{2er^2+2gr-l^2}}$$

$$\varphi(r)=\arccos\left(\frac{l^2/gr-1}{\sqrt{1+2el^2/g^2}}\right)\iff r=\frac{l^2/g}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

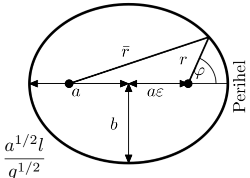
$$\varepsilon:=\sqrt{1+2el^2/g^2}$$

- Kreis: $\varepsilon=0,\quad E=E_{\min}=-G^2M^2\mu^3/2L^2$
- Ellipse: $\varepsilon<1,\quad E<0$
- Parabel: $\varepsilon=1,\quad E=0$
- Hyperbel: $\varepsilon>1,\quad E>0$

Translation in eine Richtung			Rotation um feste Achse			Diverses
Ort	x	m	Winkel	φ	rad	$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$
Geschw.	$\vec{v}=\dot{x}$	m/s	Winkelgeschw.	$\vec{\omega}=\dot{\varphi}$	rad/s	$v=r\omega,\quad a_z=\frac{v^2}{r}=r\omega^2$
Beschl.	$\vec{a}=\ddot{x}$	m/s^2	Winkelbeschl.	$\vec{\alpha}=\ddot{\varphi}$	rad/^{2}	Hooke: $F=-k\Delta x,\quad E_{\text{pot}}=\frac{1}{2}k\Delta x^2$
Masse	m	kg	Trägheitsmom.	$I=\int r_\perp^2\,dm$	kg m^2	
Impuls	$\vec{p}=m\vec{v}$	Ns	Drehimpuls	$\vec{L}=I\vec{\omega}$	Nms	
Kraft	$\vec{F}=\dot{\vec{p}}\overset{m=\text{const}}{=}m\vec{a}$	N	Drehmoment	$\vec{M}=\dot{\vec{L}}\overset{I=\text{const}}{=}I\vec{\alpha}$	N m	
Arbeit	$W=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}$	J	Dreharbeit	$W=\int\vec{M}\cdot d\vec{\varphi}$	J	
Kin. E.	$T=\frac{1}{2}m\vec{v}^2=\frac{\vec{p}^2}{2m}$	J	Rot. E.	$T=\frac{1}{2}I\vec{\omega}^2=\frac{\vec{L}^2}{2I}$	J	
Leistung	$P=\dot{W}=\vec{F}\cdot\vec{v}$	W	Drehleistung	$P=\vec{M}\cdot\vec{\omega}$	W	

Ellipsenbahnen

$$r+\bar{r}=2a\quad\Rightarrow\quad r=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$



$$a=\frac{l^2}{g(1-\varepsilon^2)},\qquad b=a\sqrt{1-\varepsilon^2}=\frac{a^{1/2}l}{g^{1/2}}$$

$$e=-\frac{g}{2a},\qquad l=\sqrt{ag}\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

$$A(T)=\frac{1}{2}lT=\pi ab\quad\Rightarrow\quad T=\frac{2A(T)}{l}=\frac{2\pi a^{3/2}}{g^{1/2}}$$

3 Schwingungsprobleme

$$q^{N+k}:=\dot{q}^k,\qquad \dot{q}^k=q^{N+k},\qquad \dot{q}^{N+k}=a^k(q^i,q^{N+i})$$

$$\dot{\vec{z}}(t)=A(t)\vec{z}(t)+\vec{b}(t)$$

wobei $\vec{b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, $A:\mathbb{R}\to\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, $A(t):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$.

Propagator Löse $\dot{\vec{z}}(t)=A(t)\vec{z}(t)$

$$P(t,s):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\qquad \vec{z}(t)=P(t,s)\vec{z}(s)$$

$$P(t,r)P(r,s)=P(t,s),\qquad P(t,s)^{-1}=P(s,t),\qquad P(s,s)=\mathrm{id}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P(t,s)=A(t)P(t,s),\qquad \frac{\partial}{\partial s}P(t,s)=-P(t,s)A(s)$$

$$\begin{aligned}P(t,s)&=\mathrm{id}+\int_s^t\mathrm{d}t'A(t')P(t',s)\overset{P(t,s)\approx\mathrm{id}}{\approx}\mathrm{id}+\int_s^t\mathrm{d}t'A(t')\\&=\sum_{n=0}^\infty\int_s^t\mathrm{d}t_1\int_s^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_s^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_nA(t_1)\dots A(t_n)\\&=\mathrm{T}\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\left[\int_s^t\mathrm{d}t'A(t')\right]^n=\mathrm{T}\left[\exp\int_s^t\mathrm{d}t'A(t')\right]\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\vec{z}(t)=P(t,s)\vec{z}(s)+\int_s^t\mathrm{d}t'P(t,t')\vec{b}(t')\qquad\text{(Duhamel-Formel)}$$

Eigenschwingungen

Autonome homogene Differenzialgleichung: $\dot{\vec{z}}(t)=A\vec{z}(t)$

$\Rightarrow P(t,s)=P(t-s,s-s)=P(t-s,0)=:P(t-s)$

$$P(t)=\exp(tA)=\sum_{n=0}^\infty\frac{t^n}{n!}A^n$$

$$\vec{z}=\vec{a}e^{\lambda t},\qquad A\vec{a}=\lambda\vec{a},\qquad A=\sum_{\lambda\in\Sigma(A)}\lambda P_\lambda$$

$$P_\lambda\vec{a}=\begin{cases}\vec{a} & \text{falls } A\vec{a}=\lambda\vec{a}\\0 & \text{anderenfalls}\end{cases},\qquad P_\lambda P_\mu=\begin{cases}P_\lambda & \text{falls } \lambda=\mu\\0 & \text{anderenfalls}\end{cases}$$

$$\sum_{\lambda\in\Sigma(A)}P_\lambda=\mathrm{id}$$

$$P(t)=e^{At}=\sum_{\lambda\in\Sigma(A)}e^{\lambda t}P_\lambda,\qquad \vec{z}(t)=\sum_{\lambda\in\Sigma(A)}e^{\lambda t}P_\lambda\vec{z}(0)$$

- Für $\ddot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}$: Finde λ_i, v_i: $Av_i=\lambda_iv_i$
  $\longrightarrow\vec{x}(t)=\sum_i\left[C_{i,1}\cos(\sqrt{\lambda_i}t)+C_{i,2}\sin(\sqrt{\lambda_i}t)\right]v_i$

Gedämpfter Oszillator (Beispiel)

$$m\ddot{x}=-kx-r\dot{x},\qquad k,r\geq0$$

$$\dot{\vec{z}}=A\vec{z},\qquad \vec{z}:=(x,\dot{x}),\qquad A=\begin{pmatrix}0&1\\-\alpha^2&-2\beta\end{pmatrix}$$

$$\alpha:=\sqrt{\frac{k}{m}},\qquad \beta:=\frac{r}{2m},\qquad \omega_0:=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$$

$$\lambda_{1,2}=-\beta\pm i\sqrt{\beta^2-\alpha^2},\qquad \vec{a}_{1,2}=(1,\lambda_{1,2})$$

$$P(t)=\exp(tA)=e^{-\beta t}\left[\cos(\omega_0t)\,\mathrm{id}+\frac{\sin(\omega_0t)}{\omega_0}(A+\beta\,\mathrm{id})\right]$$

$$\begin{pmatrix}x(t)\\\dot{x}(t)\end{pmatrix}=P(t)\begin{pmatrix}x(0)\\\dot{x}(0)\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x(t)=c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t}, & \text{falls } \alpha\neq\beta\\x(t)=ce^{\lambda t}+c'te^{\lambda t}, & \text{falls } \alpha=\beta\end{cases}$$

- Schwingfall $\beta<\alpha$, wobei $\omega_0\in\mathbb{R}$:

$$x(t)=x(0)e^{-\beta t}\left(\cos(\omega_0t)+\beta\frac{\sin(\omega_0t)}{\omega_0}\right)+\dot{x}(0)e^{-\beta t}\frac{\sin(\omega_0t)}{\omega_0}$$

- Dämpfungsfall $\beta>\alpha$, wobei $\omega_0=iw_0\in i\mathbb{R}$:

$$x(t)=x(0)e^{-\beta t}\left(\cosh(w_0t)+\beta\frac{\sinh(w_0t)}{w_0}\right)+\dot{x}(0)e^{-\beta t}\frac{\sinh(w_0t)}{w_0}$$

- Kritisch gedämpfter Fall $\beta=\alpha$, wobei $\omega_0=0$:

$$P(t)=e^{-\beta t}\,\mathrm{id}+te^{-\beta t}(A+\beta\,\mathrm{id})$$

$$x(t)=x(0)e^{-\beta t}(1+\beta t)+\dot{x}(0)e^{-\beta t}t$$

Stabilität

- Ein System heisst *stabil*, falls $\vec{z}(t)\not\to\infty$ für $t\to\infty$. Dies ist genau dann der fall wenn $\operatorname{Re}\lambda_i\leq0$ ist.
- Ein system heisst *dissipativ* falls eine positiv definite quadratische Form $(\cdot,\cdot)$ existiert sodass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{z},\vec{z})\leq0$ ist. Im Fall vom Oszillator definiert die Energie eine quadratische Form

$$(\vec{z},\vec{z}):=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2=E\geq0,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{z},\vec{z})=-r\dot{x}^2\leq0$$

Erzwungene Schwingungen

Autonomes System: $\dot{\vec{z}}(t)=A\vec{z}(t)+\vec{b}(t)$

$$\Rightarrow\vec{z}(t)=e^{A(t-s)}\vec{z}(s)+\int_s^t\mathrm{d}t'e^{A(t-t')}\vec{b}(t')$$

- Stossanregung: $\vec{b}(t)=\delta(t-t_0)\vec{b}_0$

$$\longrightarrow\quad\vec{z}(t)=\theta(t-t_0)P(t,t_0)\vec{b}_0$$

- Harmonische anregung: $\vec{b}(t)=e^{i\omega(t-s)}\vec{b}_0$

$$\longrightarrow\quad\vec{z}(t)=e^{A(t-s)}\vec{z}(s)+\int_s^t\mathrm{d}t'e^{t'(i\omega\,\mathrm{id}-A)}e^{At}e^{-i\omega s}\vec{b}_0$$

$$\underline{i\omega\notin\Sigma(A):}\quad\vec{z}(t)=\sum_{\lambda\in\Sigma(A)}\left[e^{\lambda(t-s)}P_\lambda\vec{z}(s)+\frac{e^{i\omega(t-s)}-e^{\lambda(t-s)}}{i\omega-\lambda}P_\lambda\vec{b}_0\right]$$

$$\underline{i\omega\notin\Sigma(A),\ \operatorname{Re}\lambda<0\text{ (gedämpft)}:}\quad\vec{z}(t)=e^{i\omega(t-s)}(i\omega\,\mathrm{id}-A)^{-1}\vec{b}_0$$

$$\underline{i\omega\in\Sigma(A):}\quad P_\lambda\vec{z}(t)=e^{i\omega(t-s)}\left(P_\lambda\vec{z}(s)+(t-s)P_\lambda\vec{b}_0\right)$$

$\underline{i\omega \approx \lambda \in \Sigma(A)\text{ (res.)}:}\ \vec z(t) \approx \frac{e^{i\omega(t-s)}}{i\omega-\lambda} P_\lambda \vec b_0 = r e^{i(\omega t - \omega s+\delta)} P_\lambda \vec b_0$
mit der *Suszeptibilität* $r = \frac{1}{\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+\beta^2}}$, *Phase* $\delta = \arctan\frac{\omega_0-\omega}{\beta}$, *Dämpfungsparameter* $\beta := -\mathrm{Re}\,\lambda$, *Eigenfrequenz* $\omega_0 := \mathrm{Im}\,\lambda$.

Parametrische Resonanz $\dot{\vec z} = A(t)\vec z$, $A(t+T)=A(t)$

- Math. Pendel: $\begin{pmatrix}\dot\theta(t)\\ \dot L(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & m^{-1}R(t)^{-2}\\ -mgR(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta(t)\\L(t)\end{pmatrix}$
- Periodizität des Propagators:

$$P(t+T,s+T)=P(t,s) \Rightarrow P(nT,0)=P(T,0)^n$$

- Falls $P(T)$ Eigenwerte $|\lambda|>1$ hat, dann wachst die Lösung exponentiell. Für $|\lambda|\le 1$ konvergiert die Lösung.

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\det P(t,s) = \mathrm{tr}\,A(t)\det P(t,s)$$

- Für Math. Pendel: $\mathrm{tr}\,A(t)=0 \Rightarrow \det P(t) = \det P(0)=1$

4 Starrer Körper

- Inertialsystem $\Sigma^x \longleftrightarrow$ Körperfestes System Σ^y:

$$\vec x(t) = \vec x_{O_y}(t) + R(t)\vec y$$

- Für $\vec x_{O_y}=0$: $\vec x = R(t)\vec y$, $\vec y = R(t)^\top \vec x(t)$
- L_y beschreibt den Drehimpuls bezüglich des Interialsystems Σ^x, allerdings in den Koordinaten des Körperfesten Systems Σ^y.

$$\vec L_x = R\vec L_y, \qquad \vec M_x = R\vec M_y$$

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\vec L_y = \vec M_x, \qquad \vec M_y = R^\top \frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\vec L = R^\top \dot R \vec L_y + \frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\vec L_y$$

- Drehimpulssatz: $\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\vec L_y = \vec M_y - \vec\omega\times\vec L_y$

Trägheitstensor

$$I = \sum_i m_i\left(\vec y_i^2\,\mathrm{id} - \vec y_i\vec y_i^\top\right) = \int \mathrm dy^3 \rho(\vec y)\left(\vec y^2\,\mathrm{id} - \vec y\vec y^\top\right)$$

$$I_{jk} = \sum_i m_i\left(\vec y_i^2\delta_{jk} - y_{i,j}y_{i,k}\right) = \int \mathrm dy^3\rho(\vec y)\left(\vec y^2\delta_{jk} - y_jy_k\right)$$

$$\vec L_y = I\vec\omega, \qquad T = \frac12\vec\omega^\top I\vec\omega = \frac12 \vec L_y\cdot\vec\omega$$

- Hauptträgheitsachsen: $I\vec e_i = I_i\vec e_i$ $\quad I_{jk}=I_j\delta_{jk}$

$$I'_{jk} = I_{jk} + M(\vec a^2\delta_{jk} - a_ja_k), \quad I' = I + M(\vec a^2\,\mathrm{id} - \vec a\vec a^\top)$$

- Steiner'sche Satz: $I = I_c + Mh^2$

Freie Kreisel $\vec M = 0 \implies \dot{\vec L}_y(t) = -\vec\omega\times\vec L_y(t)$

- Euler Gleichungen: $I_i\dot\omega_i = -\varepsilon_{ijk}\omega_j I_k\omega_k$

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}T=0 \qquad \frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\vec L_y^2 = 0$$

5 Spezielle Relativitätstheorie

Minkowski-Metrik

$$\begin{aligned}(\cdot,\cdot): V\times V&\to\mathbb R\\ (x,y)&\mapsto x^\mu y^\nu\eta_{\mu\nu}\\ &\simeq x^\top\eta y\end{aligned} \qquad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

- Zeitartig: $(x,x)>0$
- Raumartig: $(x,x)<0$
- Lichtartig: $(x,x)=0$

Lorentz-Transformationen

$$L_+^\uparrow := \{\Lambda\in \mathrm O(3,1)\mid \det\Lambda=+1,\ \Lambda^0_0\ge1\}$$

$$x = x^\mu e_\mu = \bar x^\mu\bar e_\mu, \qquad \bar e_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu e_\nu, \qquad \bar x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu$$

Rotation: $\Lambda(R) = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&&&\\0&&R&\\0&&&\end{pmatrix}$, $\quad R\in \mathrm{SO}(3)$

$\Lambda(R_1\circ R_2) = \Lambda(R_1)\circ\Lambda(R_2)$

Boost: $\Lambda(u) = \begin{pmatrix}\cosh u & \sinh u & 0&0\\ \sinh u&\cosh u&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $\quad u\in\mathbb R$

$\Lambda(u) = \begin{pmatrix}\gamma&\beta\gamma&0&0\\\beta\gamma&\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,

$v = c\tanh u, \quad \beta = \frac vc, \quad \gamma = \frac1{\sqrt{1-\beta^2}}$

$\Lambda(u_1)\Lambda(u_2) = \Lambda(u_1+u_2)$

Allgemein: $\Lambda = \Lambda(R_1)\Lambda(u)\Lambda(R_2)$

$$\Delta x = \frac{L_0}{\gamma}, \quad \Delta t = \gamma\Delta\tau, \quad f = f_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = f_0\gamma\left(1-\frac vc\right)$$

Kinematik

$x = x^\mu e_\mu \qquad x^\mu = \begin{pmatrix}t\\\vec x(t)\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}\text{zeitartig:} & \sqrt{x\cdot x}=\tau\\ \text{raumartig:} & \sqrt{-x\cdot x} = L_0\end{cases}$

$u = \frac{\mathrm dx}{\mathrm d\tau} = \frac{\mathrm dt}{\mathrm d\tau}\frac{\mathrm dx}{\mathrm dt} \qquad u^\mu = \gamma\begin{pmatrix}1\\\vec v\end{pmatrix} \qquad \sqrt{u\cdot u}=1 \qquad \frac{\mathrm dt}{\mathrm d\tau}=\gamma$

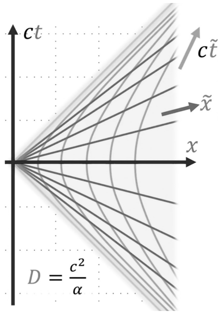
$p = mu \qquad p^\mu = \begin{pmatrix}E\\\gamma\vec p\end{pmatrix} \qquad \sqrt{p\cdot p}=m \qquad E^2 = m^2+\gamma^2\vec p^2$, $E_{\text{kin}} = p^0 - m$

$F = \frac{\mathrm dp}{\mathrm d\tau} = ma \qquad F^\mu = \gamma\begin{pmatrix}\vec F\cdot\vec v\\\vec F\end{pmatrix} \qquad \vec F\cdot\vec v = \frac{\mathrm dE}{\mathrm dt}$

$$a = \frac{\mathrm d^2x}{\mathrm d\tau^2} = \frac{\mathrm d^2x}{\mathrm dt^2}\left(\frac{\mathrm dt}{\mathrm d\tau}\right)^2 + \frac{\mathrm dt}{\mathrm d\tau}\left(\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\frac{\mathrm dt}{\mathrm d\tau}\right)\frac{\mathrm dx}{\mathrm dt} \qquad \sqrt{-a\cdot a}=\alpha$$

$$a^\mu = \gamma^2\begin{pmatrix}0\\\vec a\end{pmatrix} - \vec a\cdot\vec v\gamma^4\begin{pmatrix}1\\\vec v\end{pmatrix} \qquad \frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\frac{\mathrm dt}{\mathrm d\tau} = \frac{\vec v\dot{\vec v}}{\sqrt{1-\vec v^2}^3}$$

Rindler Koordinaten: Konstant beschleunigter Beobachter



Es gilt: $u\cdot a=0$, $\quad a\cdot a = -\alpha^2$

EoM: $\begin{cases} t = 1/\alpha\sinh(\alpha\tau)\\ x = 1/\alpha\cosh(\alpha\tau)\end{cases}$

$\leftrightarrow \begin{cases}\hat x^0 =: \hat t &= 1/\alpha\,\mathrm{arctanh}\left(\frac tx\right)\\ \hat x^1 =: \hat x &= \sqrt{x^2-t^2}\end{cases}$

$\leftrightarrow\begin{cases} x^0 =: t &= \hat x\sinh(\alpha\hat t)\\ x^1 =: x &= \hat x\cosh(\alpha\hat t)\end{cases}$

Für $\hat x = \text{const}$:

$\hat x = \frac1\alpha \qquad \tau = \alpha\hat x\hat t \qquad x\cdot x = -\hat x^2$

6 Lagrange-Formalismus

$$\mathcal L = T - V$$

$$S[f] = \int_{t_1}^{t_2}\mathcal L(f(t),f'(t),t)\,\mathrm dt \qquad \delta S[f]=0$$

$$\frac{\partial\mathcal L}{\partial f}(f(t),f'(t),t) - \frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\left[\frac{\partial\mathcal L}{\partial f'}(f(t),f'(t),t)\right]=0$$

- $\mathcal L$ und $\tilde{\mathcal L}$ sind äquivalent ($\delta S[f] = \delta\tilde S[f]$) falls:

$$\mathcal L(f,f',t) = \tilde{\mathcal L}(f,f',t) + \frac{\mathrm d}{\mathrm dt}K(f,t)$$

Für $\mathcal L(f,f')$: $\quad \mathcal L(f(t),f'(t)) - f'(t)\frac{\partial\mathcal L}{\partial f'}(f(t),f'(t)) = \text{const.}$

$\delta S[f]=0\wedge\delta H[f]=0 \Leftrightarrow \delta\bar S[f,\lambda]=0, \quad \bar S[f,\lambda] := S[f]+\lambda H[f]$

Lagrange Multiplikator Suchen Lösungen $\vec x\in\{\vec x\mid\theta(\vec x)=0\}$

$$\Psi(\vec x,\lambda) = \mathcal L(\vec x)+\lambda\theta(\vec x) \to \text{EL-Gl. und } \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}(\vec x,\lambda)=0$$

Beispiele

- Teilchen in zeitunabhängigem Potenzial

$$T=\frac12 m\dot{\vec x}^2 \qquad \mathcal L = T-V \qquad S[\vec x] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm dt\,\mathcal L(\vec x(t),\dot{\vec x}(t))$$

$$\delta S[\vec x]=0 \quad\to\quad \frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\frac{\partial\mathcal L}{\partial\dot{\vec x}_i} - \frac{\partial\mathcal L}{\partial\vec x_i}=0$$

$$\frac{\partial\mathcal L}{\partial\dot{\vec x}} = m\dot{\vec x} \qquad \frac{\partial\mathcal L}{\vec x} = -\frac{\partial V}{\partial\vec x} = \vec Fd \quad\to\quad m\ddot{\vec x} = \vec F$$

- Elektrisch geladenes Teilchen

$$\mathcal L(\vec x,\dot{\vec x},t) = \frac12 m\dot{\vec x}^2 - q\Phi(\vec x,t)+q\dot{\vec x}\cdot\vec A(\vec x,t) \quad\to\quad m\ddot x = q\vec E + q\dot{\vec x}\times\vec B$$

7 Symmetrie

- Falls $\frac{\partial\mathcal L}{\partial q^\alpha}=0$, dann ist die Lagrange funktion invariant unter translytion $q^\alpha(t)\mapsto q^\alpha(t)+\lambda$. Wir nennen diese Koordinaten q^α *zyklisch*.
- Der *Konjugierte Impuls* einer zyklischen Koordinate ist $p_\alpha := \frac{\partial\mathcal L}{\partial\dot q^\alpha}$. Dieser ist erhalten $\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}p_\alpha = \frac{\partial\mathcal L}{\partial q^\alpha}=0$.
- Der *Fluss* auf einer Menge X ist eine abbildung $\phi: X\times\mathbb R\to X$ sodass $\forall x\in X, s,t\in\mathbb R: \phi(x,0)=x,\ \phi(\phi(x,t),s) = \phi(x,s+t)$. Im Allgemeinen hängt der fluss von der Zeit ab: $t\mapsto\phi_\lambda(q(t),t)$
- Wir nennen einen Fluss eine stetige symmetrie einer Lagrange Funktion, falls $\mathcal L(q_\lambda(t),\dot q_\lambda(t),t) = \mathcal L(q(t),\dot q(t),t)\ \forall\lambda\in\mathbb R$.
- Jeder Fluss hat ein Vektorfeld $v: q\mapsto v(q) := \frac{\mathrm d}{\mathrm d\lambda}\phi_\lambda(q)\mid_{\lambda=0}$. $\frac{\partial}{\partial\lambda}\phi_\lambda(q) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\phi_{\lambda+\varepsilon}(q)|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\phi_\varepsilon(\phi_\lambda(q))|_{\varepsilon=0} = v(\phi_\lambda(q))$
- **Noether:** Sei $\mathcal L(q,\dot q,t)$ eine Lagrange funktion und $v(q,t)$ das erzeugende Vektorfeld des flusses $\phi_\lambda(q,t)$, sodass die stetige symmetrie $\mathcal L(q_\lambda,\dot q_\lambda,t) = \mathcal L(q,\dot q,t) + \frac{\mathrm d}{\mathrm dt}K_\lambda(q,t)\mid_{\lambda=0}\ \forall t$ für jede bahn $t\mapsto q(t)$ und jedes λ gilt. Die Noethersche ladung ist erhalten: $F(q,\dot q,t) := \frac{\partial\mathcal L}{\partial\dot q^\alpha}(q,\dot q,t)v^\alpha(q,t) - \frac{\mathrm d}{\mathrm d\lambda}K_\lambda(q,t)|_{\lambda=0}$ also $\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}F=0$.

8 Hamilton-Formalismus

$$p_\alpha := \frac{\partial\mathcal L}{\partial\dot q^\alpha} \qquad F_\alpha := \frac{\partial\mathcal L}{\partial q^\alpha} \qquad \text{EL-Gl: } \frac{\mathrm dp_\alpha}{\mathrm dt} = F_\alpha$$

Legendre-Transformierte $f^*:\mathbb R^n\to\mathbb R$ von $f:\mathbb R^n\to\mathbb R$

$$f^*(p_1,\dots,p_n) = \sup_{(x_1,\dots,x_n)}\left(\sum_{i=1}^n x_ip_i - f(x_1,\dots,x_n)\right)$$

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dx}(xp-f(x))=0 \Leftrightarrow p = f'(x), \quad p_i = \frac{\partial}{\partial x_i}f(x_1,\dots,x_n)$$

$$(f^*)' = (f')^{-1} \qquad (f^*)^* = f$$

Hamilton Funktion & Gleichung

$$\mathcal H(q,p,t) = \sup_{\dot q}\left(p_\alpha\dot q^\alpha - \mathcal L(q,\dot q,t)\right), \qquad p_\alpha = \frac{\partial\mathcal L}{\partial\dot q^\alpha}(q,\dot q,t) \rightsquigarrow \dot q^\alpha$$

EL-Gl: (Kanonische Bwg-Gl) $\qquad \dot q^\alpha = \frac{\partial\mathcal H}{\partial p_\alpha}(q,p,t) \qquad \dot p_\alpha = -\frac{\partial\mathcal H}{\partial q^\alpha}(q,p,t)$

- Die Hamilton Funktion definiert die *Energie* des Systems:

$$\mathcal H = T+V \qquad T = \frac{p^2}{2m} \qquad V = V(q)$$

$$\mathcal H(q,\dot q,t) = \left(\frac{\partial\mathcal L}{\partial\dot q^\alpha}(q,\dot q,t)\right)\dot q^\alpha - \mathcal L(q,\dot q,t) = p_\alpha\dot q^\alpha - \mathcal L$$

Observable Funktion $F:(q,p)\mapsto F(q,p)$ auf dem Phasenraum

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}F(q(t),p(t)) = \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\dot q_\alpha + \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\dot p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\frac{\partial\mathcal H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\mathcal H}{\partial q^\alpha} = \{F,\mathcal H\}$$

Für $F(q,p,t)$: $\quad \frac{\mathrm d}{\mathrm dt}F = \{F,\mathcal H\}+\frac{\partial F}{\partial t}$

Poisson-Klammer $\quad \{F,G\} := \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q^\alpha}$

$$\{F,G\} = -\{G,F\}$$
$$\{F,\lambda G+\mu H\} = \lambda\{F,G\}+\mu\{F,G\}$$
$$\{F,G\cdot H\} = \{F,G\}\cdot H + G\cdot\{F,H\}$$
$$\{q^\alpha,q^\beta\} = \{p_\alpha,p_\beta\} = 0 \quad \{q^\alpha,p_\beta\} = \delta^\alpha_\beta \quad \underbrace{\dot q^\alpha = \{q^\alpha,\mathcal H\} \quad \dot p_\alpha = \{p_\alpha,\mathcal H\}}_{\text{Bewegungsgleichungen}}$$

Phasenkoordinaten $\quad z = (z^1,..,z^{2N}) := (q^1,..,q^N,p_1,..,p_N)$

$$\varepsilon_{\mu\nu} := \begin{pmatrix}0 & +\mathrm{id}_N\\ -\mathrm{id}_N & 0\end{pmatrix} \qquad (\varepsilon_{\mu\nu})^{-1} = \varepsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix}0&-\mathrm{id}_N\\+\mathrm{id}_N&0\end{pmatrix}$$

$$\{F,G\} = -\varepsilon^{\mu\nu}\frac{\partial F}{\partial z^\mu}\frac{\partial G}{\partial z^\nu} \qquad \dot z^\mu = \{z^\mu,\mathcal H\} = -\varepsilon^{\mu\nu}\frac{\partial\mathcal H}{\partial z^\nu}$$

Kanonische Transformation $\quad \phi: z\mapsto\bar z$ erhält $\{\cdot,\cdot\}$:

$$\{F,G\}(z(\bar z)) = -\varepsilon^{\mu\nu}\frac{\partial F(z(\bar z))}{\partial\bar z^\mu}\frac{\partial G(z(\bar z))}{\partial\bar z^\nu} = -\varepsilon^{\mu\nu}\frac{\partial z^\rho}{\partial\bar z^\mu}\frac{\partial z^\sigma}{\partial\bar z^\nu}\frac{\partial F}{\partial z^\rho}\frac{\partial G}{\partial z^\sigma}$$

- Lässt symplektische Struktur invariant: $\quad \varepsilon^{\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu}\frac{\partial z^\rho}{\partial\bar z^\mu}\frac{\partial z^\sigma}{\partial\bar z^\nu}$
- Lässt Bewegungsgleichung invariant: $\quad \dot{\bar z}^\mu = -\varepsilon^{\mu\nu}\frac{\partial\mathcal H}{\partial\bar z^\nu}$
- Jacobi-Matrix $J^\mu{}_\nu := \frac{\partial z^\mu}{\partial\bar z^\nu} \qquad \varepsilon^{-1} = J\varepsilon^{-1}J^\top \Leftrightarrow J^\top\varepsilon J = \varepsilon$
- Jacobi-Determinante hat Betrag 1: $\quad \det(J)^2=1$
- Beispiel: $\quad \mathrm{Sp}(2N,\mathbb R) = \{A\in \mathrm{GL}(2N,\mathbb R)\mid A^\top\varepsilon A = \varepsilon\}$

9 Diverses

- Taylor expansion: $\quad f_a(x) = \sum_{n=0}^\infty\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ $= f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots$

Differentialgleichungen

2. Ordnung, homogen mit konstanten Koeffizienten $ay''+by'+cy=0$. Die Lösungen der zugehörigen charakteristischen Gleichung $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ seien $\lambda_{1,2}$:

- $\lambda_{1,2}\in\mathbb R$ und $\lambda_1\ne\lambda_2 \qquad y(x) = C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$
- $\lambda_1=\lambda_2 \qquad y(x) = (C_1+C_2x)e^{\lambda_1x}$
- $\lambda_{1,2} = \alpha\pm i\beta,\ \beta\ne0 \qquad y(x) = (C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x)e^{\alpha x}$

Ansätze mit $\alpha>0$:

$$y''+\alpha^2y=0 \quad\longrightarrow\quad y(x) = Ae^{i\alpha x}+Be^{-i\alpha x}$$
$$y''-\alpha^2y=0 \quad\longrightarrow\quad y(x) = Ae^{\alpha x}+Be^{-\alpha x}$$

Vektoralgebra $\qquad R = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}$

$$(\mathbf A\times\mathbf B)^2 = \mathbf A^2\mathbf B^2 - (\mathbf A\cdot\mathbf B)^2 \qquad \mathbf A\cdot(\mathbf B\times\mathbf C) = \mathbf B\cdot(\mathbf C\times\mathbf A) = \mathbf C\cdot(\mathbf A\times\mathbf B)$$

$$(\mathbf A\times\mathbf B)\cdot(\mathbf C\times\mathbf D) = (\mathbf A\cdot\mathbf C)(\mathbf B\cdot\mathbf D) - (\mathbf B\cdot\mathbf C)(\mathbf A\cdot\mathbf D)$$

Trigonometrische & Hyperbolische Identitäten

$$\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$
$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = 1$$
$$\sinh' x = \cosh x$$
$$\cosh' x = \sinh x$$
$$\tanh' x = 1-\tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$